MARSANO

SUL TRIANGOLO

RETTILINEO

N. 50

CONSIDERAZIONI

SUL

TRIANGOLO RETTILINEO

MEMORIA

DI

GIO. BATTA MARSANO

PROFESSORE DI MATEMATICHE IN GENOVA

GENOVA

LUIGI BEUF EDITORE LIBRAIO VIA NUOVISSIMA N. 57

1863

AVVERTIMENTO

Ho conservato a questa Memoria lo stesso titolo già adoperato da EULERO *e da* TERQUEM *per opera di simile argomento* (*V. Nouvelles Annales de Mathématique, par* M. TERQUEM, *etc. T. I, p.* 79 *e* 196): *l'esposizione però ne è più elementare, e la materia più completa per molti punti; come ne giudicherà, dal confronto, ogni benevolo lettore.*

Causa a questo mio lavoro fu una nota del Prof. N. TRUDI, sul circolo de' nove punti, *inserita nel giornale di Matematiche cominciato a pubblicarsi in Napoli lo scorso gennajo: la lettura di questa nota servì a me d'occasione per riprendere lo studio di siffatta questione; donde ebbi tosto a comporne la Memoria, che ora indirizzo specialmente ai giovani studiosi della Geometria. Possa io non ingannarmi nello sperare da loro una favorevole accoglienza, principale scopo della mia fatica.*

Genova, in Giugno 1863.

G. B. MARSANO

CONSIDERAZIONI

SUL TRIANGOLO RETTILINEO

Parte prima — *Studio della figura.*

1. — Ogni punto della bissettrice di un angolo essendo sempre ad ugual distanza da' suoi lati, e reciprocamente; se si dividano in due parti uguali ciascuno degli angoli interni ed esterni di un triangolo, l'incontro di ogni due bissettrici, partite da vertici differenti, riuscirà sempre un punto egualmente distante dai tre lati; per cui esso apparterrà ancora in comune ad una bissettrice partita dal terzo vertice: quindi tutte e sei le bissettrici si incontreranno a tre a tre in quattro punti distinti, ognuno situato ad ugual distanza dai tre lati del triangolo medesimo.

2. — Se da tai punti come centri, e con tali distanze per raggi, si descrivano dei circoli, ciascuno di questi sarà tangente alle direzioni dei tre lati in discorso, risultanti perpendicolari alle estremità di tre de' suoi raggi: ma un solo circolo però toccherà detti lati nei limiti di loro lunghezze, e dalla parte interna del triangolo; mentre gli altri circoli toccheranno un solo lato all' esterno, e gli altri due lati nei loro prolungamenti, ancora dalla parte interna dell' angolo che comprendono. Al primo di siffatti circoli, il cui

centro cade per entro il triangolo, all' incontro delle sue tre bissettrici angolari interne, vien dato il nome di *circolo inscritto:* ai tre altri circoli, i cui centri, fuori del triangolo, si trovano agli incontri di ciascuna bissettrice angolare interna colle due bissettrici angolari esterne partite dagli altri vertici, si dà il nome comune di *circoli ex-inscritti*, od *escritti;* distinguendoli fra loro dal lato che toccano esternamente nei limiti ancora di sua lunghezza: perciò si chiameranno circoli escritti *relativi* ad ognuno dei lati medesimi toccati esternamente.

3. — Pei vertici del triangolo facendo passare un circolo, che si dice il suo *circolo circoscritto*, ed il cui centro si trova all' incontro delle tre perpendicolari elevate sulle metà de' suoi tre lati; hanno luogo delle relazioni rimarchevoli di posizione e di grandezza fra gli elementi di questo circolo e quelli dei circoli predetti, le quali formeranno oggetto di studio di questa Memoria: dove non si avrà già la pretesa di esporre al tutto cose nuove; ma solamente l' intenzione di giovare a' giovani studiosi, con presentar loro d' una maniera elementare alcune delle principali proprietà dei circoli medesimi; unitamente ad altre questioni, che pure vi hanno un' intima corrispondenza.

4. — Comincierò dal dimostrare il seguente teorema:

Il mezzo di ogni arco sotteso da ciascun lato di un triangolo nel suo circolo circoscritto, è sempre ad ugual distanza dalle estremità di questo lato e dai centri del circolo inscritto e del circolo escritto relativo, ovvero e dai centri dei circoli escritti relativi agli altri due lati, secondo che si consideri l' arco compreso nell' angolo opposto, ovvero l' arco circoscritto a quest' angolo, sottesi dal medesimo lato.

Sia ABC (fig. 1.ª) il triangolo, O il centro del suo circolo circoscritto, dal quale sian condotti i diametri DD′, EE′, FF′, rispettivamente perpendicolari sopra i suoi lati BC, AC, AB, che divideranno per metà nei punti H, I, K, ad un tempo che gli archi da loro sottesi, nei punti D, E, F per quelli contenuti negli angoli opposti A, B, C, e nei punti D′, E′, F′, per quelli circoscritti agli angoli medesimi.

Conducendo ai punti D, E, F le rette AD, BE, CF, saranno queste le tre bissettrici degli angoli interni A, B, C del triangolo, le quali forniranno col loro incontro G il centro del circolo inscritto; e conducendo ai punti D′, E′, F′ le rette AD′, BE′, CF′, saranno queste

le tre bissettrici de' suoi angoli esterni, *supplementari* di A, B, C, le quali daranno coi loro incontri G', G'', G''' i centri dei suoi circoli escritti relativi rispettivamente ai lati BC, AC, AB. Infatti è chiaro che saranno ad esempio gli angoli BAD e CAD uguali, come insistenti sugli archi uguali BD e CD, col vertice A alla circonferenza; e parimente saranno ad esempio uguali gli angoli BAG''' e CAG'', e i loro opposti al vertice, perchè misurati dalle metà degli archi uguali BD' e CD'; e così degli altri. Inoltre apparisce manifesta la perpendicolarità d' ogni bissettrice interna sull' esterna al medesimo vertice, avendosi appunto *retti* gli angoli DAD', EBE', FCF'.

Gli archi BDC, AEC, AFB componendo insieme l' intiera circonferenza, sarà la sòmma di tre qualunque delle loro metà uguale ad una semicirconferenza; dal che derivano le conclusioni seguenti:

$$AF + AE + EF' = AF + AE + BD,$$
$$BF + BD + DF' = BF + BD + AE,$$
$$CE + CD + DE' = CE + CD + AF;$$

per cui

$$EF' = FE' = BD = CD = mis\ A,$$
$$DF' = FD' = AE = CE' = mis\ B,$$
$$DE' = ED' = AF = BF = mis\ C.$$

Quindi saranno gli archi

$$AD' = AE - ED' = mis\,B - mis\,C = mis\,(B - C),$$
$$BE' = BD - DE' = mis\,A - mis\,C = mis\,(A - C),$$
$$CF' = CD - DF' = mis\,A - mis\,B = mis\,(A - B);$$

per cui gli angoli

$ADD' = \frac{1}{2}(B - C)$, $BEE' = \frac{1}{2}(A - C)$, $CFF' = \frac{1}{2}(A - B)$: ed inoltre l' arco $BE' = CF' + AD'$, atteso la differenza $(A - C) = (A - B) + (B - C)$.

Ciò posto, venendo al teorema enunciato, tiriamo in figura, ad esempio, la retta CD, la quale determina i due triangoli CDG e CDG'. Nel primo di questi CDG, si ha l' angolo DGC misurato dalla semisomma degli archi CD ed AF, e l' angolo DCG misurato dalla semisomma degli archi rispettivamente uguali BD e BF; onde tali angoli sono uguali, e il triangolo isoscele, vale a dire che si è il lato $DG = DC$. Parimente, nel triangolo CDG', si ha l' angolo DG'C misurato dalla semidifferenza degli archi AC e DF', cioè da mezza la differenza $AEC - DF' = AEC - CE = AE = DF'$, mentre l'angolo DCG' ha

direttamente questa misura; onde questi angoli uguali, e il triangolo isoscele, vale a dire $DG' = DC$. Dunque si conchiude la distanza $DG = DG' = DB = DC$: e in pari modo si dimostreranno le altre $EG = EG'' = EA = EC$, ed $FG = FG''' = FA = FB$.

Considerando il mezzo D' dell' altro arco sotteso dal lato BC, si unisca pur questo al punto C per la retta CD', che determina ancora i due triangoli $CD'G''$ e $CD'G'''$. Sarà, nel primo, l' angolo $D'CG''$ misurato dalla semisomma degli archi $D'C$ e CF', cioè da mezzo l' arco $D'F' = D'E + EF'$, mentre l' angolo $D'G''C$ ha per misura mezza la differenza $ABF' - D'C = AF + FD + DF' - D'E - EC = FD = FE' + E'D = EF' + D'E$; onde l' uno di questi angoli uguale all' altro, e perciò il triangolo isoscele, vale a dire che sarà il lato $D'G'' = D'C$. Parimente, nel triangolo $CD'G'''$, si ha l' angolo $D'CG'''$ misurato da mezzo l' arco $D'F$, e l' angolo $D'G'''C$ misurato da mezza la differenza $D'C - AF = D'B - BF = D'F$; onde questi angoli uguali, e il triangolo isoscele, ossia il lato $D'G''' = D'C$. Si conchiude pertanto la distanza $D'G'' = D'G''' = D'B = D'C$; e in modo analogo si proveranno le altre $E'G' = E'G''' = E'A = E'C$, ed $F'G' = F'G'' = F'A = F'B$.

5. — Di qui segue un metodo semplicissimo per ottenere con esattezza, nel tracciamento della figura, i centri dei circoli escritti, deducendoli da quello del circolo inscritto, adoperando all' uopo il circolo circoscritto al triangolo medesimo. Infatti, segnato quest' ultimo, e divisi in mezzo, ai punti D, E, F, i suoi archi contenuti negli angoli A, B, C; basterà condurre le rette indefinite AD, BE, CF, che si incontreranno al centro G del circolo inscritto, e quindi portare sui prolungamenti di tali rette le distanze DG', EG'', FG''' rispettivamente uguali a DG, EG, FG; mentre, per verificazione, dovranno esse riuscire uguali a DB e DC, ad EA ed EC, ad FA ed FB. Inoltre, uniti siffatti centri G', G'', G''', per le rette $G'G''$, $G'G'''$, $G''G'''$, dovranno queste passare ai rispettivi vertici C, B, A del triangolo proposto; e tagliare una seconda volta la circonferenza circoscritta nei nuovi punti F', E', D', che saranno i mezzi di esse rette, o cioè dei lati del triangolo $G'G''G'''$ da loro formato.

6. — A riguardo di questo triangolo $G'G''G'''$ delle bissettrici angolari esterne di ABC, possono farsi parecchie utili osservazioni, che condurranno pure, convenientemente generalizzate, a rimarchevoli conseguenze.

Da prima può vedersi come i suoi angoli G', G'', G''' vengano divisi ciascuno, dalla bissettrice interna di ABC che vi arriva, in due parti rispettivamente uguali alle metà di due angoli interni di ABC, escluso quello di partenza di detta bissettrice, e presi i due rimanenti in senso alternato rispetto a quest' ultima: vale a dire che saranno gli angoli: $AG'B=\frac{1}{2}C$, $AG'C=\frac{1}{2}B$; $BG''A=\frac{1}{2}C$, $BG''C=\frac{1}{2}A$; $CG'''A=\frac{1}{2}B$, $CG'''B=\frac{1}{2}A$; come è facile riconoscere immediatamente per gli archi che li misurano. Quindi ognuno di detti angoli G', G'', G''' del triangolo G'G''G''', sarà la semisomma di due degli angoli di ABC, escluso l' opposto a quel che si considera, ovvero sarà il *complemento* della metà di tale angolo opposto medesimo: avendosi infatti l' angolo $G'=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ-\frac{1}{2}A$, l' angolo $G''=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C=90^\circ-\frac{1}{2}B$, e l' angolo $G'''=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=90^\circ-\frac{1}{2}C$; atteso la somma $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ$, dall'essere $A+B+C=180^\circ$. Conseguentemente saranno gli angoli $\frac{1}{2}A=90^\circ-G'$, $\frac{1}{2}B=90^\circ-G''$, $\frac{1}{2}C=90^\circ-G'''$; e vale a dire i *semi-angoli* di ABC *complementi* degli *intieri opposti* di G'G''G'''. Questi ultimi angoli si troverebbero ancora uguali ai *semi-esterni* di ABC, che sono del pari i *complementi* dei *semi-interni* dello stesso; cosicchè $G'=CAG''=BAG'''$, $G''=CBG'=ABG'''$, $G'''=BCG'=ACG''$: e dessi pure sarebbero uguali a quelli formati dalle tre bissettrici angolari interne di ABC al loro incontro G, cioè rispettivamente uguali a BGF ed EGC, ad AGF e DGC, ad AGE e DGB, come si riconosce immediatamente sulla figura.

7. — Rispetto al detto triangolo G'G''G''', formato dalle tre bissettrici angolari esterne di ABC, sulle quali sono rispettivamente perpendicolari le tre bissettrici angolari interne ai medesimi vertici; potranno ancora riguardarsi queste ultime G'A, G''B, G'''C come le sue tre altezze rispettive, abbassate da' suoi vertici G', G'', G''' sopra i suoi lati opposti G''G''', G'G''', G'G'', e le quali si incontrano in un punto comune G. Quindi il triangolo ABC potrebbe dirsi alla sua volta quello determinato dai piedi A, B, C di tali altezze, uniti insieme colle rette AB, AC, BC; ed il circolo di centro O, ad esso circoscritto, potrebbe definirsi, in riguardo al triangolo G'G''G''', *quello condotto per i piedi delle sue tre altezze medesime:* in allora adunque, dietro il teorema dimostrato, dovrà distintamente rimarcarsi come questo circolo ABC passi ad un tempo per i mezzi D', E', F' de' suoi tre lati G''G''', G'G''', G'G'', e per i mezzi D, E, F delle distanze

G'G, G''G, G'''G de' suoi tre vertici G', G'', G''' all' incontro G delle sue altezze in discorso.

Or quanto si vien di avvertire per rispetto al triangolo G'G''G''', nel quale ABC figura come quello determinato dai piedi delle sue altezze, ben si comprende che dovrà egualmente aver luogo per qualsiasi triangolo primitivo dato, e così pure per l' ABC medesimo: onde si avrà questo teorema:

Il circolo condotto per i piedi delle altezze di un triangolo qualunque, passa ad un tempo per i mezzi de' suoi tre lati, e per i mezzi delle distanze de' suoi tre vertici all'incontro delle altezze.

Inoltre, per le cose dette qui innanzi (n. 6), potrà aggiungersi:

Tali altezze, ed i lati del triangolo primitivo, sono insieme le bissettrici degli angoli interni ed esterni del nuovo triangolo formato dai piedi delle altezze medesime; riuscendo questi semi-angoli interni ed esterni i complementi *e gli* uguali *di quelli del triangolo proposto.*

Ma per legittima che sia questa conclusione dell' avvertito teorema, pure converrà procedere a dimostrarlo e stabilirlo direttamente; affine di far meglio conoscere altre particolarità della figura, di non lieve interesse nella questione che si tratta.

8. — Essendo ABC il triangolo che si considera, rappresentino AL, BM, CN le sue tre altezze; marcando L, M, N, i loro piedi sui lati BC, AC, AB, opposti ai vertici da cui partono; e designando V il loro incontro comune, il quale sarà *dentro* o *fuori* il triangolo, secondo che sia questo *acutangolo* od *ottusangolo,* riuscendo *al vertice dell' angolo retto* quando sia *rettangolo.* L' esistenza di un tale punto d' incontro V delle tre altezze si giustifica in ogni caso, osservando che se, dai vertici A, B, C, si conducano delle parallele (da tracciarsi in figura) C'B', C'A', B'A' ai tre lati opposti BC, AC, AB, si formerebbe così un nuovo triangolo C'B'A' simile all' ABC, e di lati *doppj*, sopra i quali lati le stesse rette AL, BM, CN sarebbero a un tempo perpendicolari nei loro punti di mezzo A, B, C: onde queste dovranno bene incontrarsi fra di loro in un punto comune, che sia il *centro del circolo circoscritto* ad A'B'C' *medesimo.* Inoltre segue da questa dimostrazione che, dovendo tutti gli elementi lineari omologhi dei due triangoli simili ABC e A'B'C' *stare fra loro* nello stesso rapporto di 1 : 2, saranno perciò i raggi dei circoli ad essi circoscritti l' uno *metà* dell' altro; ed in particolare saranno le

distanze dei loro centri ai lati rispettivi le uue *metà* delle altre corrispondenti; vale a dire iu figura: $OH=\frac{1}{2}VA$, $OI=\frac{1}{2}VB$, $OK=\frac{1}{2}VC$; siccome in altro modo verremo ancora qui appresso a queste conclusioni.

Consideriamo ora i nove punti H, I, K, mezzi dei lati di ABC; L, M, N, piedi delle sue altezze; e P, Q, R, mezzi delle distanze AV, BV, CV: dico che questi saranno tutti insieme sopra una sola e medesima circonferenza di circolo.

A tale effetto, uniamo ciascuno dei sei punti H, I, K, P, Q, R agli altri cinque, per delle rette, le quali riusciranno manifestamente parallele ai lati dei quattro triangoli ABC, ABV, ACV, BCV, ed uguali alle metà di questi lati corrispondenti; onde tali rette pure uguali e parallele fra di loro a due a due, prese nel dovuto ordine. Per tal guisa le figure KQRI, KHRP, QHIP saranno dei *rettangoli*; le cui coppie di *diagonali uguali* KR e QI, KR e HP, QI e HP, tagliandosi per metà, mentre ognuna serve a due rettangoli, forniranno così *un solo punto* ω di loro comune intersezione, il quale sarà ad ugual distanza da tutti i sei punti in discorso, o vale a dire sarà il *centro* di un circolo che passerà ad un tempo pei medesimi. Ma questo circolo passerà ancora per i piedi L, M, N delle tre altezze di ABC: avvegnachè ognuno di tali piedi sarebbe ora il *vertice di un triangolo rettangolo* avente per *ipotenusa opposta* una delle dette diagonali HP, QI, KR, diametri di esso circolo; onde questi punti L, M, N saranno bene compresi insieme sulla sua circonferenza.

9. — Per questa proprietà caratteristica che ha il circolo di centro ω, di passare a un tempo per tutti i nove punti H, I, K, L, M, N, P, Q, R, viene esso distinto dai geometri col nome di *circolo dei nove punti*: io lo designerò da qui innanzi colla denominazione speciale di *circolo medioscritto* del triangolo ABC: sembrandomi ben propria al caso; così per la circostanza di occupare esso una *posizione intermedia* fra il circolo inscritto ed il circolo circoscritto allo stesso triangolo, coi quali ha d'altronde rimarchevoli relazioni di posizione e di grandezza; come ancora per la circostanza di passare per i *mezzi* dei tre lati di ABC, i quali taglia una seconda volta ai piedi delle sue altezze; e d'altronde essendo l'unico circolo, che distintamente si consideri, fra quelli secanti i lati del triangolo medesimo.

Addottando la proposta denominazione, si può dire adesso brevemente che il circolo circoscritto al triangolo ABC, è il circolo me-

dioscritto del triangolo G'G''G''' formato dalle sue tre bissettrici angolari esterne: e quest' ultimo triangolo si troverebbe poi alla sua volta inscritto in altro circolo, che sarebbe *uguale* (se *non lo stesso* in posizione) a quello detto precedentemente circoscritto al triangolo accennato A'B'C' del n.° 8; siccome ciò apparirà chiaro dai seguenti numeri.

10. — Dall' esposta dimostrazione risulta immediatamente che il raggio del circolo medioscritto di ABC sarà sempre la *metà* del raggio del suo circolo circoscritto; dappoichè quello è pure un circolo circoscritto al triangolo HIK, od al suo uguale PQR, simile ad ABC, e di lati *metà;* onde staranno i raggi nel rapporto di $1:2$, come i lati omologhi dei triangoli simili a cui sono i circoli circoscritti. Inoltre il centro ω, già determinato dall' incontro delle tre rette HP, IQ, KR, si troverà ad un tempo situato sulla retta OV, che unisce il centro O del circolo circoscritto all' incontro V delle tre altezze, e sarà giustamente al mezzo di tale distanza OV.

Per ciò provare, osserviamo da prima che, essendo la figura HOKQ un parallelogrammo, a motivo di OH e QK parallele ad AL, ed OK e QH parallele a CN, si ha così il lato $OH=QK$, $OK=QH$; e conseguentemente $OH=QK=AP=PV=\frac{1}{2}AV$, $OK=QH=CR=RV=\frac{1}{2}CV$; come si dimostrerebbe del pari essere $OI=IIR=BQ=QV=\frac{1}{2}BV$. Quindi se si conducano ad esempio le rette HV e OP, riuscendo la figura HOPV un parallelogrammo, atteso OH uguale e parallela a PV, sarà così il mezzo ω d' una sua diagonale HP sul mezzo dell' altra diagonale OV, vale a dire che sarà ω alla metà di OV.

11. — Resta a dimostrarsi come siano ora le altezze e i lati del triangolo ABC, le bissettrici degli angoli interni ed esterni del nuovo triangolo LMN, formato dai piedi di tali altezze medesime, riuniti fra loro per le rette LM, LN, ed MN.

A tal fine si osservi che, dietro le parallele della figura, comprendenti sempre archi uguali sulla circonferenza, si avranno gli archi PM e PN uguali fra loro, perchè separatamente uguali allo stesso arco QK, al quale è pure uguale l' arco IR; si avranno gli archi QL e QN uguali fra loro, perchè uguali allo stesso HR, cui pure è uguale l' arco KP, e si avranno in fine gli archi RL ed RM uguali fra loro, perchè ciascuno uguale a QH, al quale è ancora uguale

l' arco IP: vale a dire, in sostanza, gli archi $PM=PN=QK=IR$, $QL=QN=HR=KP$, $RL=RM=QH=IP$; e quindi i loro supplementari $HM=HN=KI=QR$, $IL=IN=KH=PR$, $KL=KM=HI=PQ$: ciò che appalesa come siano i tre diametri HP, IQ, KR, del circolo medioscritto di ABC, precisamente quelli perpendicolari sopra i lati MN, LN, LM del triangolo LMN, al quale è circoscritto. Pertanto essendo P, Q, R i mezzi degli archi contenuti negli angoli L, M, N di questo triangolo, ed H, I, K quelli degli archi circoscritti agli stessi angoli; saranno in conseguenza (n. 4) le rette LP, MQ, NR le tre bissettrici angolari interne, ed LH, MI, NK, ossia BC, AC, AB, le tre bissettrici angolari esterne del triangolo medesimo. Quindi i punti V, A, B, C risulteranno i centri dei circoli inscritto ed escritti di siffatto triangolo LMN, dei piedi delle altezze di ABC.

Qualora fosse A un angolo *ottuso* (fig. 2.ª), avrebbero luogo in complesso le stesse conclusioni; salvo al cangiarsi relativamente di posto i punti Q ed R coi loro corrispondenti K ed I, e viceversa; trovandosi ora questi ultimi K ed I i mezzi degli archi compresi negli angoli N ed M; ed i primi R e Q invece i mezzi degli archi circoscritti agli stessi angoli: per cui riusciranno NR ed MQ due bissettrici angolari esterne, rimanendo LP interna; ed NK e MI due bissettrici angolari interne, restando esterna LH. Quindi sarebbe A al presente il centro del circolo inscritto nel triangolo LMN, mentre V si cangia nel centro di un circolo escritto, quello relativo al lato MN; e così pure B e C divengono i centri dei circoli escritti relativi rispettivamente ai lati LM ed LN, mentre lo erano dei lati LN ed LM sulla figura 1ª. In sostanza, considerati i centri primitivi nell' ordine A, B, C, V, si presentano ora questi precisamente nell' ordine *inverso* V, C, B, A, per rispetto agli stessi lati MN, LN, LM, a cui si rapportano i circoli escritti, ed in ultimo (a tutti i tre lati insieme) il circolo inscritto.

12. — Dagli archi testè riconosciuti uguali sul circolo medioscritto, risultano pure al momento cogniti i valori dei semi-angoli interni ed esterni del triangolo LMN, comparati a quelli di ABC, ed ai loro complementi.

Infatti l'angolo $ABM = compl A$ avendo a misura mezzo l' arco $MN-KQ=MN-NP=MP$, che è pur misura dell' angolo MLP, metà di L, si ha così questo $MLP=PLN=\frac{1}{2}L=compl A$. Parimente l' angolo $BAL=compl B$ venendo misurato da mezzo l' arco $KL-NP=KL-KQ=QL$, come l'angolo QML, metà di M, si

ha questo $QML = QMN = \frac{1}{2} M = compl B$. Infine la misura di $CAL = compl\, C$ essendo mezzo l'arco $IL - MP = IL - IR = RL$, come quella dell'angolo RNL, metà di N, si conchiude pur questo $RNL = RNM = \frac{1}{2} N = compl C$.

In simil modo, l'angolo A o BAC venendo misurato da mezza la differenza $KLI - NM = KQ + QR + RI - MN = QR = NH = MH$, come lo sono gli angoli NLB ed MLC, semi-esterni in L, si hanno così questi $NLB = MLC = A$. Parimente l'angolo B od ABC avendo a misura mezza la differenza $NMH - KL = NI + IH - KL = NI = IL$, che è pur misura degli angoli AMN e CML, semi-esterni in M, sono così questi $AMN = CML = B$. Ed infine l'angolo C od ACB misurandosi per mezza la differenza $MNL - IH = MK + KL - IH = MK = KL$, come gli angoli ANM e BNL, semi-esterni in N, si hanno ancora questi $ANM = BNL = C$. D'altronde tali angoli semi-esterni in L, in M, in N, essendo i rispettivi *complementi* dei semi-interni ai medesimi vertici, si conchiudono al momento quelli uguali ad A, a B, a C, dall'essere già questi dimostrati uguali a *compl*A, a *compl*B, a *compl*C.

Queste conclusioni si modificherebbero alquanto pel caso dell'angolo A *ottuso* (fig. 2.ª); riuscendo allora uguali a B e C i semi-angoli interni in M e in N, e invece uguali a *compl*B e *compl*C i semi-angoli esterni agli stessi vertici; mantenendosi tuttavia il semi-interno in L uguale a *compl*A, che sarebbe ora espresso in valore assoluto da $A - 90°$; e divenendo propriamente il semi-esterno in L il *supplemento* di A, se leggasi ad esempio (come vorrebbe la figura) BLM in luogo di BLN; ma restando ancora uguale ad A, se continuisi a leggere BLN, come quando A era *acuto*.

13. — Nel caso che l'angolo A sia *retto* (fig. 3.ª), confondendosi allora le altezze BM e CN rispettivamente coi due cateti BA e CA, l'incontro V delle tre altezze verrebbe in A, assieme ai punti M ed N, col P intermedio; ed il triangolo LMN si ridurrebbe ad *una linea retta* LA: la quale però dovrà considerarsi *doppia*, siccome la riunione in un solo dei due lati LM ed LN del triangolo generale LMN, il di cui terzo lato MN vien ridotto a *zero*. Ma questo terzo lato, benchè di *lunghezza nulla*, pure dovrà ritenersi come avente tuttavia una *direzione propria determinata;* la quale sia quella di una retta xy formante con AC un angolo uguale a B, e con AB un angolo uguale a C, *sempre perpendicolare* a PH, che diviene qui la *mediana* dell'ipotenusa; *conformemente a quanto succede*

di MN, nei due casi di A *acuto*, e di A *ottuso*, fra quali è *limite intermedio* il caso di A *retto; e per modo tale*, che le altezze BM e CN, ossia BA e CA *si trovino sempre le bissettrici degli angoli* LMN ad LNM, formati da detta direzione xy di MN coi due lati LM ed LN confusi insieme in LA: la quale LA, od AL, terza altezza del triangolo ABC, può dirsi ancora la *bissettrice* dell'angolo MLN di quei lati medesimi, ridotto a *zero*.

In tale circostanza, il circolo medioscritto del triangolo rettangolo ABC, passerebbe per i *cinque* punti distinti A, H, I, K, L, (per cui apparirebbe improprio di più chiamarlo *circolo dei nove punti*); confondendosi insieme K e Q, R ed I, nel momento stesso che M, N, P si riducono al solo A, su cui pure cade il punto V. Si dirà pertanto:

Nel triangolo rettangolo, il circolo medioscritto passa per i mezzi de' suoi tre lati, per il vertice dell' angolo retto, e per il piede della perpendicolare da questo abbassata sull' ipotenusa.

Il suo centro sarebbe all'incontro della mediana dell'ipotenusa colla congiungente i mezzi dei due cateti; ed il suo raggio, *metà* di ognuna di queste linee, riuscirebbe così uguale al *quarto* dell' ipotenusa.

14. — Nei due casi più generali di A *acuto*, e di A *ottuso*, adoperando la lettera V dell' incontro delle tre altezze, nell' indicazione di alcuni angoli, sui lati dei quali si trova; potranno scriversi in comune, per ambedue le figure, le qui innanzi vedute eguaglianze di angoli, come appresso:

ALM=ALN=*compl*A, BML=VMN=*compl*B, CNL=VNM=*compl*C;
CLM=BLN=A, CML=AMN=B, BNL=ANM=C.

Quest' ultime dimostrano un fatto, che può così enunciarsi:

Le coppie di lati del triangolo LMN *fanno con ciascun lato di* ABC, *da cui partono, ed in senso contrario, degli angoli uguali a quello di* ABC, *che si trova opposto al medesimo lato.*

Inoltre da tali eguaglianze di angoli risulta manifesto come i tre triangoli AMN, BLN, CLM, formati ai vertici A, B, C, per l'unione dei piedi delle altezze a due a due, siano insieme simili al triangolo proposto ABC; abbenchè le rette d'unione MN, LN, LM, terzi lati rispettivi di quei triangoli, non si trovino altrimenti parallele in generale ai terzi lati di quest' ultimo, BC, AC, AB, che pure sono i loro corrispondenti omologhi. Potrebbero siffatte rette chiamarsi *antiparallele* dei medesimi lati; e così definirsi LMN il *triangolo delle antiparallele* dei lati di ABC: avver-

tito che, per ciascuna in particolare, per esempio MN, se si prendesse sopra AB una parte AM′=AM, e sopra AC una parte AN′=AN, tirando M′N′, si avrebbe un triangolo AM′N′ uguale all'AMN, e perciò simile all'ABC, ma tale ora che M′N′ sarebbe parallela a BC, avendo gli altri lati omologhi a due a due una comune direzione. Del resto, questa denominazione di *rette antiparallele* ai lati di un triangolo, sarebbe consimile a quella usata di *sezioni antiparallele* fatte nel cono sotto certe condizioni, che presentano non poca analogia con quelle delle rette in discorso, per rispetto alle basi delle due figure.

15. — Considerando uno di detti triangoli, per esempio l'AMN al vertice A, si vede come siano due de' suoi lati AM e AN le projezioni dei lati, ad essi omologhi, AB e AC del triangolo simile ABC, fatte sotto la stessa inclinazione dell'angolo A; per cui dovrà ancora riuscire, in ragion di proporzione, il terzo lato MN dell'un triangolo la projezione del terzo lato omologo BC dell'altro triangolo, sotto la medesima inclinazione stabilita dall'angolo A, fra la retta a progettarsi e l'asse che si prenda di projezione. Per facilità di discorso e di scrittura, io converrò di indicare colla notazione *proj* XY(*ang* θ) la projezione fatta di una retta qualunque XY sopra un asse, a cui sia dessa inclinata dell'angolo θ, o, come si dirà più brevemente, la *projezione di* XY *sotto l'angolo* θ: e di tal maniera, avendosi di già, nel detto triangolo, il lato AM=*proj* AB(*ang* A), e il lato AN=*proj* AC(*ang* A), dovrà pure aversi conseguentemente il terzo lato MN=*proj* BC(*ang* A). Ma di questo fatto può darsi ancora una dimostrazione diretta, fuori dell'analogia, che si va a indicare qui appresso.

Si unisca il punto H ai punti M ed N, per le rette HM ed HN, che riusciranno uguali fra loro, ed uguali a BH e CH; attesochè, per gli archi dimostrati uguali HM, HN, KI, QR, sarebbero le corde HM=HN=KI=QR, e quindi pure le stesse =BH=CH, dietro le parallele della figura: ma del resto, avvertendo che H è il mezzo dell'ipotenusa comune ai due triangoli rettangoli BCM e BCN, si ha immediatamente HM=HN=HB=HC.

Ciò posto, nel triangolo isoscele HMN sarebbe ciascun suo angolo alla base MN uguale ad A; poichè questi angoli HMN ed HNM avrebbero per misure rispettive le metà degli archi HN ed HM, le quali già misurano gli angoli BLN e CLM uguali ad A: onde essendo partitamente *proj* HM (*ang* A)$=\frac{1}{2}$MN, e *proj* HN (*ang* A)$=\frac{1}{2}$MN,

ne segue la somma, ovvero la base intiera
$MN = proj\, HM (ang\, A) + proj\, HN (ang\, A) = proj \{HM + HN\} (ang\, A)$, cioè $MN = proj\, BC (ang\, A)$, atteso $HM + HN = HB + HC = BC$. In pari modo si dimostrerà essere il lato $LN = proj\, AC (ang\, B)$, ed $LM = proj\, AB (ang\, C)$.

16. — Un' altra consimile proposizione può dimostrarsi sull'attuale figura, consistente in ciò che gli stessi lati del triangolo LMN sono a un tempo le projezioni delle distanze rispettive AV, BV, CV, sotto gli angoli *complementari* di quelli ai vertici da cui partono.

Infatti se si unisca il punto P ai punti M ed N, avrebbesi qui ancora un triangolo isoscele PMN, i cui lati eguali PM e PN son d'altronde uguali a PA e PV; per esserlo queste rette a KQ ed RI, corde degli archi uguali KQ ed RI, ai quali sono uguali gli archi PM e PN: ma del resto, essendo P il mezzo dell'ipotenusa AV comune ai due triangoli rettangoli AMV e ANV, si ha immediatamente $PM = PN = PA = PV$. Or gli angoli alla base di questo triangolo isoscele PMN sono ciascuno uguale a *compl*A; avendo essi a misura mezzo l'arco NP, od MP, del pari che gli angoli MLP ed NLP già conosciuti uguali a *compl*A: e di tal maniera sarà la sua base

$$MN = proj\, PM (ang. compl A) + proj\, PN (ang. compl A) =$$

$proj \{PM + PN\} (ang. compl A)$, ossia $MN = proj\, AV (ang. compl A)$, riuscendo la somma $PM + PN = PA + PV = AV$. In modo analogo, si dimostrerà aversi parimente $LN = proj\, BV (ang. compl B)$, ed $LM = proj\, CV (ang. compl C)$.

Enunciando insieme queste e le relazioni precedenti, in rapporto al triangolo LMN, si dirà pertanto:

I lati del triangolo LMN, *dei piedi delle altezze di* ABC, *sono a un tempo le projezioni dei lati corrispondenti di questo ultimo, sotto gli angoli opposti ad essi; e le projezioni delle distanze de' suoi vertici all'incontro delle altezze, sotto gli angoli complementari di quelli agli stessi vertici.*

Nel caso dell'angolo A *retto*, sarebbero di per se evidenti queste conclusioni: $MN = 0 = proj\, BC (ang\, 90^o) = proj\, AV (ang\, 0^o)$, per $AV = 0$; $LN = LM = LA = proj\, AC (ang\, B) = proj\, AB (ang\, C)$, ed $= proj\, BV (ang. compl B) = proj\, CV (ang. compl C)$, atteso $BV = BA = AB$, $CV = CA = AC$, e $compl B = C = BAL$, $compl C = B = CAL$.

N. B. — Tutte le proposizioni dimostrate dal n.° 8 in poi, potrebbero egualmente stabilirsi con molta agevolezza, per la proporziona-

lità dei lati omologhi dei soli triangoli simili risultanti dalle altezze di ABC, e per le proprietà delle rette nel circolo: ma si è voluto rendere le dimostrazioni indipedenti da tali rapporti, affin di presentare gli stessi teoremi sotto un carattere più distinto di *Geometria pura*.

17. — L'uguale inclinazione dei lati del triangolo LMN su ciascun lato del triangolo ABC, da cui partono per coppie (n.° 14), dà luogo ad un'altra proprietà caratteristica di detto LMN, per rispetto a tutti gli altri triangoli che si possono formare coi vertici situati sui tre lati di ABC, e che, per tal circostanza, vengono detti *triangoli inscritti* in ABC medesimo. Essa è contenuta nel seguente teorema:

Il triangolo dei piedi delle altezze di un triangolo dato, è quello di minimo perimetro *fra tutti i triangoli inscritti nello stesso dato.*

Sia DEF (fig. 4.ª) il triangolo qualunque inscritto in ABC, che voglia paragonarsi, in quanto al perimetro, col triangolo LMN, determinato dai piedi delle tre altezze di ABC.

Rivolgendo due volte la figura attorno a due lati di ABC, per esempio una volta attorno ad AB, ed un'altra volta attorno ad AC; i triangoli BNL e CML venendo ribattuti nelle posizioni BNL' e CML'', riusciranno i lati NL' ed ML'' *in linea retta* con MN, a motivo degli angoli BNL' = BNL = ANM, e CML'' = CML = AMN; onde tutto il perimetro di LMN verrà tradotto nella sola linea retta L'L''. Contemporaneamente i triangoli BFD e CED ribattendosi in BFD' e in CED'', sarà il perimetro di DEF sviluppato nella *linea spezzata* D'FED'': si tratterà adunque di paragonare quest'ultima alla linea retta L'L''.

Si tiri la nuova retta D'D''; e, segnate le distanze AL e AD, si marchino pure di queste i ribattimenti rispettivi in AL' e AD', in AL'' e AD'': si avranno i due triangoli isosceli L'AL'' e D'AD'', i cui angoli al vertice comune A saranno uguali, come doppj ciascuno dell'angolo A; le parti del quale, in cui vien diviso da AL, e da AD, si riproducono le stesse al di là di AB e di AC, nei rivolgimenti fatti della figura. Ma i lati uguali del primo di questi triangoli sono *minori* dei lati uguali del secondo, a motivo di AL, perpendicolare sopra BC, *minore* di AD, obliqua: dunque sarà la base L'L'' dell'uno *minore* della base D'D'' dell'altro dei triangoli medesimi. Or la retta D'D'' è *minore* della linea spezzata D'FED'', che termina ai medesimi estremi: dunque, *a fortiori*, sarà la retta L'L'' *minore* di D'FED'', ossia il perimetro $LN + NM + ML < DF + FE + ED$; come si volea dimostrare.

Questa costruzione si modifica, pel caso dell'angolo A *retto* (fig. 5.ª), in ciò che i due triangoli isosceli L'AL'' e D'AD'' si riducono alle loro sole basi L'L'' e D'D'', *doppie* rispettivamente di AL e di AD. Frattanto la direzione che prende di per se in figura la retta L'L'', composta dei ribattimenti indicati della stessa AL in AL' e in AL'', riesce precisamente quella già avvertita (n.° 13), che deve sempre conservare il terzo lato MN ridotto a *zero* del triangolo LMN; nel mentre pure che sarebbe la sua lunghezza L'L'' il *perimetro sviluppato* di questo triangolo stesso ridotto alla retta LA, o meglio al sistema di due rette addossate e uguali alla medesima.

Ma se l'angolo A sia *ottuso*, la stessa costruzione applicata a questo caso (fig. 6.ª), portando ad addossarsi i lati NL' ed ML'' sopra il lato MN, ci fornisce la retta L'L'', non più come *somma* dei tre lati del triangolo LMN, bensì invece come *differenza* fra la somma dei due LN ed LM, ed il terzo lato MN, *esistente fuori* del triangolo ABC. Potrebbe dirsi tuttavia L'L'' la *somma algebrica* degli stessi tre lati, convenendo di riguardare l'*esterno* MN come *negativo*: ma non sarebbe più da adoperarsi in proposito la voce *perimetro*, che significa solo e sempre la somma assoluta di tutti i lati di una figura, presi senza segno, cioè positivamente. Per accordare allora questo fatto coll'esattezza delle frasi, converrebbe sostituire al detto enunciato il seguente, comune a tutti i casi:

La somma algebrica delle distanze dei piedi delle altezze di un triangolo, è sempre minore *del perimetro di qualunque triangolo inscritto in esso.*

N. B. — Riguardando *negativo* il lato MN *esterno* ad ABC, nell'ipotesi di A *ottuso*; sorgerebbe naturale l'idea di considerare del pari altri triangoli inscritti DEF, che avessero uno o due vertici situati sui prolungamenti dei lati di ABC: e, prendendo allora *negativo* quel dei loro lati che *sortisse intieramente fuori* di quest'ultimo, paragonare sempre la somma algebrica dei tre lati di ogni nuovo triangolo inscritto a tal modo, con la somma algebrica o assoluta dei lati di LMN, per qualunque caso pure dell'angolo A *ottuso*, *retto*, od *acuto*. Ma in siffatta generalità non starebbe più vero il teorema; potendo riuscire l'una di dette somme *maggiore*, o *uguale*, o *minore* dell'altra, a seconda delle posizioni dei vertici di DEF sui prolungamenti dei lati di ABC.

Potrebbe giustificarsi questa asserzione con l'esame di casi particolari, e dei modi di variazione che seguono le differenze DF — FE, o DE — EF, componenti la somma algebrica $S = DF - FE + ED$,

allorchè i punti F ed E siano presi ad esempio sui prolungamenti di BA e di CA al di là di A, e si allontanino, o si avvicinino, l'uno o l'altro, od insieme, di più in più al vertice A, *partendo* in ispecie *dagli incontri* della retta D'D'' con questi lati medesimi: ma ciò mi dilungherebbe di troppo dal mio proposito; tanto più che riuscirebbe assai nojosa una tale discussione, per le molte circostanze di figura e di posizione, di cui si avrebbe a tener conto, prima di giudicare del senso di variazione della somma S, a riguardo della retta mantenuta fissa D'D'', e pure a riguardo della somma costante $LN \pm NM + ML = L'L''$; affin di giungere alla conclusione: che, diminuendo di continuo, e per quantità finite, la somma S, a partire da un suo valore maggiore di D'D'', può dessa divenire uguale e minore di questa D'D'', e pure uguale e minore di L'L'' medesima: siccome, per grafiche costruzioni, potrebbe ancora facilmente accertarsi della verità di questo fatto.

18. — Riprendendo lo studio della figura 1.ª, avvertiremo ora su questa una proprietà distintiva di cui gode il punto V d'incontro delle tre altezze di ABC, in rapporto ai due circoli circoscritto e medioscritto di questo triangolo medesimo.

Pel centro ω del circolo medioscritto, si conducano tre diametri $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$, $\varphi\varphi'$, rispettivamente paralleli ai tre diametri DD', EE', FF', già considerati nel circolo circoscritto di centro O: passando pur quelli, come questi, per i mezzi degli archi sottesi in comune dagli stessi lati di ABC, a cui son perpendicolari, e da ambe le parti di ciascuno, si avrà la seguente proposizione:

Il mezzo di ogni arco sotteso da un lato di ABC *nel suo circolo medioscritto, riesce sempre in linea retta, e a metà distanza, col mezzo dell'arco del circolo circoscritto sotteso dallo stesso lato e dalla stessa parte, e l'incontro* V *delle tre altezze.*

Consideriamo ad esempio i punti D e δ, mezzi degli archi BDC ed $L\delta H$, sottesi nei due circoli dallo stesso lato BC, e da una sua stessa parte: dico che sarà $D\delta V$ una linea retta, e il punto δ a metà distanza fra i punti D e V.

Immaginiamo condotta la retta DV, e prolungata in ogni caso la retta $\omega\delta$ fino all'incontro di DV in un punto, che indicheremo pel momento colla lettera x: si avranno in figura i due triangoli simili $V\omega x$ e VOD, il cui rapporto dei lati omologhi sarà quello di $1:2$, a motivo di $V\omega$ metà di VO (n.º 10); onde sarà Vx metà di VD, ed ωx metà di OD. Ma il raggio $\omega\delta$ del circolo me-

dioscritto è esso la metà del raggio OD del circolo circoscritto; dunque sarà $\omega x = \omega \delta$, e per conseguenza il punto x sul punto δ: vale a dire che la retta DV passerà precisamente per il punto δ, il quale sarà inoltre il mezzo della stessa. In pari modo si dimostrerà che δ' riesce il mezzo della retta D'V, ε il mezzo di EV, e così degli altri: come ancora si verificherebbe lo stesso fatto per le estremità di due raggi paralleli qualunque dei circoli medesimi; potendovisi sempre applicare egualmente la stessa dimostrazione.

Tutte le rette $D\delta$, $D'\delta'$, $E\varepsilon$, ecc. condotte per le estremità di coppie di raggi paralleli, e *diretti nel medesimo senso*, nei due circoli O ed ω, concorrendo in comune al punto V; questo punto pertanto sarà *uno* dei *due centri di similitudine* dei circoli medesimi, e *quello* ordinariamente distinto col nome, non del tutto proprio, di *centro di similitudine esterno*, e che meglio potrebbe chiamarsi semplicemente *primo centro di similitudine.*

L'altro *centro di similitudine interno*, o piuttosto *secondo centro di similitudine* dei due circoli O ed ω, si avrebbe all'incontro Y della linea dei centri $O\omega$ con ogni retta condotta per le estremità d'ogni coppia di raggi paralleli *diretti in senso contrario*, come ad esempio OD' ed $\omega\delta$. Si può vedere come tal punto Y rinviene allo stesso d'incontro delle tre mediane AH, BI, CK del triangolo ABC, condotte da' suoi vertici A, B, C, ai mezzi H, I, K dei lati opposti.

Infatti, segnata la retta $D'\delta$, che taglia in Y la retta $O\omega$, i due triangoli simili OD'Y ed $\omega\delta Y$, dove OD' è doppio di $\omega\delta$, darebbero conseguentemente D'Y doppio di δY, ed OY doppio di ωY; per cui la distanza $OY = \frac{2}{3} O\omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} OV = \frac{1}{3} OV = \frac{1}{2} YV$, ossia VY doppia di OY. Ma dicendo x il punto d'incontro della mediana AH, per esempio, con la stessa retta $O\omega$, si avrebbero i triangoli simili AVx ed HOx, nei quali, atteso AV doppia di HO, si troverebbe del pari Ax doppia di Hx, e Vx doppia di Ox: dunque il punto x sarà in Y; vale a dire che la mediana AH passerà precisamente pel punto Y, dove sarà divisa in due parti, l'una AY doppia dell'altra HY. In pari modo si dimostrerà che la mediana BI, e la mediana CK passano insieme al punto Y, dove riusciranno pur divise ciascuna in due parti, l'una doppia dell'altra. Da ciò si rileva adunque: 1.° *che le tre mediane di un triangolo si incontrano fra loro* in un solo punto; 2.° *che ciascuna vi è divisa in due parti*, *l'*una, *che va al vertice*, doppia dell'altra, *che va al lato opposto; così che il loro incontro è su ciascuna mediana ai* due terzi *a*

partir dal vertice, *e ad* un terzo *a partire dal lato opposto*; 3.° *che tal punto è il* secondo centro di similitudine *dei due circoli circoscritto e medioscritto del triangolo medesimo*; *essendone già il* primo centro di similitudine *l' incontro delle sue tre altezze.*

Inoltre si può dire che: *i tre punti di incontro*, *quello delle tre perpendicolari elevate sulle metà dei tre lati di un triangolo*, *quello delle tre mediane*, *e quello delle tre altezze*, *sono* in linea retta *fra loro*, *e le distanze di questi punti come* 1 : 2 : 3; *avendosi precisamente in figura*: O Y : V Y : O V :: 1 : 2 : 3.

Se si considerasse il centro del circolo inscritto nel triangolo HIK dei mezzi dei tre lati di ABC; fra questo centro, il punto Y, e il punto G, si avrebbe un'analoga proposizione; essendo essi *in linea retta*, e nelle distanze proporzionali ai numeri 1, 2, 3.

19. — Un'ultima osservazione generale farò ancora sulla figura in esame, che porrà fine a questa prima parte delle nostre considerazioni.

I teoremi precedenti avendo luogo in complesso per qualsiasi triangolo *acutangolo* od *ottusangolo*, ed anche *rettangolo*, salvo le debite modificazioni; se noi ci facciamo ad applicarli successivamente ai quattro triangoli ABC, ABV, ACV, BCV, si può vedere per questi come rimarrebbe *invariabile* ed *allo stesso posto*, il triangolo LMN dei piedi delle altezze relative; riuscendo rispettivamente V, C, B, A l'*incontro* di tali altezze: onde il circolo medioscritto di ciascun di essi conserverebbesi sempre lo stesso di grandezza e di posizione nella figura. In conseguenza pure si manterrà lo stesso in grandezza il circolo circoscritto ad ognuno di detti triangoli, dovendo ognora il suo raggio trovarsi *doppio* di quello del circolo medioscritto corrispondente; ma ne cangeranno le posizioni dei centri, venendo questi a riuscire col centro O da parti opposte, e ad ugual distanza, dei lati di ABC; siccome può facilmente dimostrarsi coll' attuale figura.

Prolungando OH al di là di BC, di una quantità HO'=HO, si avrà un nuovo punto O' tale, che le distanze O'B=O'C=OB=OC=OA: ma, atteso OO' uguale e parallela ad AV (perchè] già OH metà di AV), riuscendo la figura AOO'V un parallelogrammo, si ha il lato AO=VO': dunque la distanza O'V=O'B=O'C; per cui si conosce essere O' il centro del circolo circoscritto al triangolo BCV, ed il suo raggio uguale ad OA. In pari modo, prolungando OI al di là di AC, di una quantità IO''=IO; e prolungando OK al di

là di AB, di una quantità $KO''' = KO$; si troveranno nei punti O'' e O''' i nuovi centri dei circoli circoscritti rispettivamente ai triangoli ACV ed ABV; restando sempre i loro raggi uguali ad OA.

PARTE SECONDA — *Calcolo degli elementi.*

20. — Cercherò, in quest'altra parte della presente Memoria, di comporre le espressioni dei principali elementi della figura studiata nella parte precedente, in funzione dei tre lati del triangolo proposto: per il chè sarà utile di preparare qui riunite, come in un quadro, le notazioni particolari, di cui mi varrò nei seguenti calcoli, per rappresentare alcune linee o grandezze più spesso adoperate; ricorrendo per solito, nell'indicazione di tutte le altre, alle lettere della figura, messe ai punti estremi che le determinano.

Essendo ABC il triangolo proposto, rappresenterò, come all'ordinario, colle lettere piccole a, b, c, i suoi tre lati, rispettivamente opposti ai suoi angoli A, B, C; e ne indicherò la superficie colla lettera S. Dirò R il raggio del suo circolo circoscritto, di centro O; r il raggio del suo circolo inscritto, di centro G; ed r', r'', r''' i raggi de' suoi circoli escritti, di centri G', G'', G''', relativi rispettivamente ai lati a, b, c: inoltre designerò con ρ il raggio del suo circolo medioscritto, di centro ω; il quale ρ essendo la *metà* di R, si scriverà così $\rho = \frac{1}{2} R$, ed $R = 2\rho$.

Rispetto al triangolo LMN, dei piedi delle altezze di ABC, a cui il circolo di centro ω, e raggio ρ, è principalmente circoscritto, rappresenterò con λ, μ, ν i suoi tre lati, rispettivamente opposti ai vertici L, M, N; e indicherò con Σ la sua superficie. Inoltre, occorrendo di considerare i circoli inscritto ed escritti di questo triangolo LMN, indicherò con τ, τ', τ'', τ''' i loro raggi rispettivi, che, nell'attuale figura, corrisponderebbero ai centri V, A, B, C, e sarebbero le perpendicolari abbassate da questi centri sopra i suoi lati. Manterrò, in tutto ciò che segue, l'ipotesi dell'attuale figura, cioè del triangolo ABC *acutangolo*, dove però sono gli angoli $A > B > C$, e perciò i lati opposti $a > b > c$: tornando poi facile il modificare a dovere i risultati ottenuti, per farli corrispondere ad altre ipotesi di-

verse; come sarebbe quella dell'angolo A *ottuso*, o *retto*, ovvero quella del triangolo ABC *isoscele*, o *equilatero*.

Rappresenterò in fine con $2p$ la somma dei tre lati di ABC, e con $2q$ la somma dei quadrati degli stessi lati, ponendo cioè $2p=a+b+c$, e $2q=a^2+b^2+c^2$; per cui siano p la semisomma dei lati semplici, e q la semisomma dei quadrati di questi lati di ABC. A riguardo del triangolo LMN, indicherò pure con 2π il suo perimetro $\lambda+\mu+\nu$, per cui sia $\pi=\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$. Ma, oltra queste, mi occorrerà ciò non di meno di introdurre in seguito alcune altre notazioni, che avvertirò meglio a suo luogo.

21. — Da ciascuno dei centri G, G', G'', G''', abbassando i raggi perpendicolari sopra i tre lati di ABC, determinano essi su questi lati dei segmenti contati a partir dai vertici, e manifestamente uguali fra loro a due a due intorno ad ogni stesso vertice: per il che non si è posta alcuna distinzione in figura fra l'uno e l'altro dei tre raggi d'uno stesso circolo; distinguendoli solo da un circolo all'altro, per un diverso numero di apici messi alle lettere Z delle loro estremità, in corrispondenza degli apici apposti alle lettere G dei punti da cui partono.

Frattanto avendosi, dipendentemente dal centro G del circolo inscritto, la somma di tutti i sei segmenti dei lati di ABC, $2AZ+2BZ+2CZ=a+b+c=2p$, viene la somma di tre qualunque di essi non successivi $AZ+BZ+CZ=p$; e quindi ciascun segmento in particolare, $AZ=p-a$, $BZ=p-b$, $CZ=p-c$; osservando che $a=BZ+CZ$, $b=AZ+CZ$, $c=AZ+BZ$.

Dall'eguaglianza $2p=a+b+c$, derivando le seguenti: $2p-2a=2(p-a)=-a+b+c, 2p-2b=2(p-b)=a-b+c$, $2p-2c=2(p-c)=a+b-c$; si avrebbero i valori più espliciti di questi segmenti

$AZ=p-a=\frac{-a+b+c}{2}$, $BZ=p-b=\frac{a-b+c}{2}$, $CZ=p-c=\frac{a+b-c}{2}$; essendo la loro somma $AZ+BZ+CZ=p=\frac{a+b+c}{2}$.

Considerando i raggi G'Z' condotti da G', si ha qui la somma dei soli due segmenti contati dal vertice opposto A, così espressa: $AZ'+AZ'=c+BZ'+b+CZ'=c+b+a$, ossia $2AZ'=a+b+c=2p$, per cui $AZ'=p$. Quindi segue $BZ'=AZ'-AB=p-c$, e $CZ'=AZ'-AC=p-b$; e pertanto $BZ'=CZ$, $CZ'=BZ$. Inoltre sarebbe, sopra il lato a, la distanza $ZZ'=BZ'-BZ=(p-c)-(p-b)=b-c$, differenza degli altri due lati b e c.

Analogamente, rapporto a G″, sarà $BZ''=p$, $AZ''=CZ$, $CZ''=AZ$; e, rapporto a G‴, pure $CZ'''=p$, $AZ'''=BZ$, $BZ'''=AZ$; riuscendo le distanze $ZZ''=a-c$, $ZZ'''=a-b$, sopra i lati rispettivi b e c.

Dunque, riepilogando, si hanno in figura le linee:

$AZ+BZ+CZ=AZ'=BZ''=CZ'''=p$, $AZ=CZ''=BZ'''=p-a$, $BZ=CZ'=AZ'''=p-b$, $CZ=BZ'=AZ''=p-c$; ed inoltre, sopra i lati a, b, c, rispettivamente le distanze $ZZ'=b-c$, $ZZ''=a-c$, $ZZ'''=a-b$; riuscendo la intermedia $ZZ''=ZZ'+ZZ'''$, poichè la differenza $a-c=a-b+b-c$. Vi sarebbero in figura altre distanze così notate ZZ', ZZ'', ZZ''', ma *non sui lati rispettivi* a, b, c; le quali invece sono evidentemente uguali a questi lati a, b, c medesimi: donde seguono poi le distanze $Z''Z'''=b+c$, $Z'Z'''=a+c$, $Z'Z''=a+b$.

22. — Le avvertite relazioni di uguaglianza tra i varj segmenti dei lati di ABC, determinati dai raggi di contatto de' suoi circoli inscritto ed escritti, danno luogo ad una osservazione, che meglio serve a confermare la perfetta analogia esistente fra la coppia dei triangoli G′G″G‴ ed ABC, e la coppia dei triangoli ABC ed LMN.

Infatti si è veduto, ai n.[i] 15 e 16, come i lati di LMN siano a un tempo le projezioni dei lati di ABC, sotto gli angoli opposti ad essi, e delle distanze dei vertici A, B, C all'incontro V delle altezze, sotto gli angoli complementari di quelli agli stessi vertici. Ora il triangolo ABC essendo per rispetto al triangolo G′G″G‴, ciò che è appunto il triangolo LMN per rispetto ad ABC; deve dunque egualmente combinarsi che i lati di ABC sieno le projezioni dei lati di G′G″G‴, sotto gli angoli loro opposti in questo triangolo; e sieno a un tempo le projezioni delle distanze dei vertici G′, G″, G‴ all'incontro G delle sue altezze, sotto gli angoli complementari di quelli ai vertici medesimi. Tali conclusioni si verificano bene al momento sulla figura.

Essendo, pel n.° 6, rispettivamente uguali a G′, a G″, a G‴, i semi-angoli esterni in A, in B, in C del triangolo ABC; si ha manifestamente:

$$\begin{aligned} &proj\, G'''G''(ang\, G') = AZ'''+AZ''=BZ+CZ=BC,\\ &proj\, G'''G'(ang\, G'') = BZ'''+BZ' \;=AZ+CZ=AC,\\ &proj\, G''G'(ang\, G''') = CZ'' \;+CZ' \;=AZ+BZ=AB. \end{aligned}$$

Del pari, essendo (n.° 6) i semi-angoli interni in A, in B, in C,

i rispettivi complementi degli angoli interni opposti G′, G″, G‴; si ha manifestamente:

$$proj\, G'G(ang.\, compl\, G') = BZ + BZ' = BZ + CZ = BC,$$
$$proj\, G''G(ang.\, compl\, G'') = AZ + AZ'' = AZ + CZ = AC,$$
$$proj\, G'''G(ang.\, compl\, G''') = AZ + AZ''' = AZ + BZ = AB.$$

Questo metodo di dimostrazione si sarebbe potuto applicare anche al triangolo LMN, derivato di ABC: potendosi inoltre modificare lo stesso in modo, da evitare l'espressione diretta dei segmenti de' suoi lati nella loro somma π, e così il bisogno di conoscere avanti tutte le relazioni d'uguaglianza che hanno luogo fra i medesimi.

23. — I segmenti $p-a$, $p-b$, $p-c$, e la loro somma p, insieme ai lati a, b, c, di cui sono essi d'altronde funzioni particolari, vanno ad entrare di continuo nelle principali formole che ci proponiamo di ottenere: per il chè si è voluto considerarli d'una maniera speciale sulla figura, dove risultano direttamente determinati dalla costruzione indicata. Ne siano già un esempio le relazioni qui appresso dimostrate fra i raggi dei circoli inscritto ed escritti, la superficie S del triangolo, e detti segmenti; in attendenza di più eleganti risultati, che si esprimeranno coi valori dei medesimi.

Essendo la superficie $ABC = GBC + GAC + GAB$, ne segue la relazione $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$, da cui si ricava il raggio del circolo inscritto $r = \frac{S}{p}$.

Parimente avendosi lo stesso triangolo $ABC = G'AB + G'AC - G'BC$, viene la relazione $S = \frac{1}{2}cr' + \frac{1}{2}br' - \frac{1}{2}ar' = \frac{1}{2}(c+b-a)r'$ $= (p-a)r'$, da cui segue $r' = \frac{S}{p-a}$: e in pari modo si otterrebbe $r'' = \frac{S}{p-b}$, $r''' = \frac{S}{p-c}$.

Questi raggi dei circoli inscritto ed escritti sarebbero adunque cogniti in funzione dei tre lati a, b, c, quando lo fosse l'area S del triangolo; ciò che si otterrà in appresso per differenti maniere: e reciprocamente, cognito uno di tai raggi, avrebbesi tosto l'area S di conseguenza.

Frattanto giova avvertire come le dette relazioni somministrando le seguenti $S = pr = (p-a)r' = (p-b)r'' = (p-c)r'''$, queste verificansi pure all'istante sulla figura: avendosi, ad esempio, dai triangoli simili AGZ e AG′Z′, la proporzione AZ : GZ :: AZ′ : G′Z′, ossia $p-a : r :: p : r'$, che si traduce nell'egnaglianza $pr = (p-a)r'$. Perciò, solo provato $S = pr$, conchiuderebbesi ancora $S = (p-a)r'$, da

cui seguirebbe $r' = \frac{S}{p-a}$, come si è trovato direttamente: inoltre potrebbe scriversi $r' = \frac{pr}{p-a}$.

Atteso la corrispondenza, che si osserva di continuo, fra le linee p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, ed i raggi r, r', r'', r'''; si converrà da qui innanzi di chiamar *quelle* col nome di *segmenti relativi* a *questi*, e pure ai *centri* cui appartengono: dicendosi in particolare $p-a$ il *segmento relativo* al raggio r', od al centro G'; $p-b$ il *segmento relativo* al raggio r'', od al centro G''; $p-c$ il *segmento relativo* al raggio r''', od al centro G'''; e così p il *segmento relativo* al raggio r, od al centro G. Di tal maniera, si potranno allora enunciare le precedenti relazioni dimostrate, come segue:

Il raggio di ogni circolo inscritto od escritto, è uguale al quoziente dell'area del triangolo divisa pel segmento relativo ad esso raggio, od al suo centro.

L'area del triangolo è espressa dal prodotto di qualunque raggio di circolo inscritto od escritto, moltiplicato pel segmento ad esso relativo.

I raggi dei circoli inscritto ed escritti sono inversamente proporzionali ai loro segmenti relativi; ovvero *direttamente proporzionali ai quozienti dell'unità divisa per gli stessi segmenti*: avendosi infatti le proporzioni $r : r' :: p-a : p :: \frac{1}{p} : \frac{1}{p-a}$, ecc., che si comprendono tutte nella sola continuata $r : r' : r'' : r''' :: \frac{1}{p} : \frac{1}{p-a} : \frac{1}{p-b} : \frac{1}{p-c}$.

24. — Calcoliamo il raggio R del circolo circoscritto. Dicendo S il punto dove la bissettrice AD dell'angolo A incontra il lato opposto BC, i due triangoli ACD ed ABS saranno simili, per avere in A un angolo eguale, e di più l'angolo ADC = ABS, misurati l'uno e l'altro da mezzo l'arco AC; onde la proporzione AC : AD :: AS : AB, da cui segue il prodotto AC . AB ossia bc = AD . AS. Ma i triangoli rettangoli ADD' ed ALS pure essendo simili, danno la proporzione AD : DD' :: AL : AS, da cui AD . AS = DD' . AL = $2R$. AL: dunque il prodotto $bc = 2R$. AL; ciò che esprime questo teorema:

Il prodotto di due lati di un triangolo è uguale al prodotto del diametro del circolo circoscritto per l'altezza corrispondente al terzo lato.

Ora essendo la superficie $S = \frac{1}{2}$BC . AL $= \frac{1}{2} a$. AL, ne deriva l'altezza AL $= \frac{2S}{a}$: quindi, sostituendo, viene il prodotto $bc = 2R \cdot \frac{2S}{a}$, da cui segue $4RS = abc$, e pertanto il valore del raggio del circolo circoscritto $R = \frac{abc}{4S}$. Si può dire in tal modo:

Il raggio del circolo circoscritto è uguale al prodotto dei tre lati del triangolo, diviso per il quadruplo della sua superficie.

Esso verrà al tutto cognito in funzione dei tre lati a, b, c, quando lo sia S: e avrebbesi ad un tempo il raggio del circolo medio-scritto $\rho = \frac{1}{2} R = \frac{abc}{8S}$.

Se si applichi la proposizione precedente a ciascuna coppia dei lati a, b, c, presi a due a due, avrebbersi le relazioni: $bc = 2R.\mathrm{AL}$, $ac = 2R.\mathrm{BM}$, $ab = 2R.\mathrm{CN}$; dalle quali segue $a^2 b^2 c^2 = 8R^3 \mathrm{AL}.\mathrm{BM}.\mathrm{CN}$, e quindi il prodotto delle tre altezze del triangolo $\mathrm{AL}.\mathrm{BM}.\mathrm{CN} = \frac{a^2 b^2 c^2}{8R^3}$.

25. — Proponiamoci ora di calcolare i segmenti dei lati di ABC, determinati su di essi dalle bissettrici de' suoi angoli interni ed esterni; non che le lunghezze di queste bissettrici comprese fra i vertici di partenza, e i loro incontri coi lati opposti, e colla circonferenza circoscritta; come pure le parti loro comprese fra questi incontri, i vertici del triangolo, e i centri di due dei circoli inscritto ed escritti, che contiene ciascuna sulla propria direzione.

Importa ricordare a tal proposito il seguente teorema:

Ogni bissettrice angolare interna od esterna di un triangolo, determina sempre sul lato opposto due segmenti proporzionali ai lati adiacenti.

Di questo teorema, oltre le dimostrazioni che se ne danno comunemente in Geometria, si può render ragione all'istante, come segue.

Considerando i due triangoli ABS, ACS col vertice in A, hanno essi uguale altezza, e stanno fra loro come le basi BS e CS: considerandoli invece col vertice in S, hanno pure altezze uguali (essendo uguali le perpendicolari abbassate dal punto S sopra i lati AB e AC dell'angolo A), onde staranno fra loro come le basi AB e AC: quindi, pel rapporto comune ABS : ACS, conchiudesi la proporzione BS : CS :: AB : AC.

Precisamente nella stessa maniera, si dimostrerà la proporzione BS′ : CS′ :: AB : AC, dicendo S′ l'incontro della bissetrice esterna in A col lato opposto BC: ed avrebbesi poi di conseguenza BS : CS :: BS′ : CS′.

26. — Dalla proporzione BS : CS :: AB : AC, ovvero CS : BS :: AC : AB, deducendosi la seguente CS + BS : CS : BS :: AC + AB : AC : AB, che rinviene a questa a : CS : BS :: $b+c$: b : c; si ricavano di qui i valori dei segmenti $\mathrm{CS} = b \cdot \frac{a}{b+c}$, $\mathrm{BS} = c \cdot \frac{a}{b+c}$. Analogamente, dicendo T ed U gli incontri delle altre due bissettrici degli angoli interni

B e C coi lati opposti AC e AB, si avrebbero i segmenti relativi: $CT = a \cdot \frac{b}{a+c}$, $AT = c \cdot \frac{b}{a+c}$; $BU = a \cdot \frac{c}{a+b}$, $AU = b \cdot \frac{c}{a+b}$: onde si può dire in generale:

Ciascun segmento, determinato da ogni bissettrice angolare interna sul lato opposto del triangolo, è uguale al prodotto del lato adiacente pel rapporto del lato, su cui cade, alla somma degli altri due lati.

In pari modo, dalla proporzione $CS' : BS' :: AC : AB$, derivando la seguente $CS' - BS' : CS' : BS' :: AC - AB : AC : AB$, ossia $a : CS' : BS' :: b - c : b : c$, si ottengono i valori dei segmenti $CS' = b \cdot \frac{a}{b-c}$, $BS' = c \cdot \frac{a}{b-c}$: e così, dicendo T′ e U′ gli incontri delle bissettrici angolari esterne in B e in C coi lati opposti AC e AB, si avrebbero quelli dei segmenti relativi: $CT' = a \cdot \frac{b}{a-c}$, $AT' = c \cdot \frac{b}{a-c}$; $BU' = a \cdot \frac{c}{a-b}$, $AU' = b \cdot \frac{c}{a-b}$: onde può dirsi ancora:

Ciascun segmento, determinato da ogni bissettrice angolare esterna sul lato opposto del triangolo, è uguale al prodotto del lato adiacente pel rapporto del lato, su cui cade, alla differenza degli altri due lati.

Inoltre si ottiene la distanza $SS' = BS + BS' = \frac{ac}{b+c} + \frac{ac}{b-c} = ac \cdot \left\{ \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b-c} \right\}$, che diviene $SS' = \frac{2abc}{b^2-c^2}$: ed egualmente si avrebbero le altre $TT' = \frac{2abc}{a^2-c^2}$, $UU' = \frac{2abc}{a^2-b^2}$.

In fine si trovano i prodotti $BS . CT . AU = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b)(a+c)(b+c)} = CS . AT . BU$, e $BS' . CT' . AU' = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-b)(a-c)(b-c)} = CS' . AT' . BU'$; ciò che si esprime dicendo:

In ogni gruppo di sei segmenti analoghi, il prodotto di tre alternati, è uguale al prodotto degli altri tre.

27. — Le bissettrici angolari interne ed esterne, intendendosi specialmente con questo nome le loro lunghezze limitate dai vertici di partenza ai lati opposti, saranno determinate di valore pel seguente teorema:

Il quadrato di ogni bissettrice angolare interna è uguale al prodotto dei lati adiacenti meno *il prodotto dei segmenti relativi al lato opposto; e il quadrato di ogni bissettrice angolare esterna è uguale al prodotto dei segmenti relativi al lato opposto* meno *il prodotto dei lati adiacenti.*

Rispetto alla bissettrice interna AS, prolungata fino in D alla circonferenza circoscritta, si avrebbe di già, come al n.° 24, la rela-

zione $AD.AS = AC.AB$: ma essendo $AD = AS + SD$, si ottiene il prodotto $(AS + SD).AS = \overline{AS}^2 + SD.AS = AC.AB$. I triangoli simili CDS e ABS danno inoltre la proporzione $DS : CS :: BS : AS$, per cui il prodotto $DS.AS = CS.BS$: dunque, sostituendo, viene $\overline{AS}^2 + BS.CS = AC.AB$, da cui il valore di $\overline{AS}^2 = AC.AB - CS.BS$; che corrisponde alla prima parte del teorema enunciato. Ponendo, per le linee del secondo membro, le loro espressioni in a, b, c, risulta la seguente di $\overline{AS}^2 = bc - \frac{ba}{b+c} \cdot \frac{ca}{b+c} = bc \cdot \left\{1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right\}$, che diviene $\overline{AS}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot \left\{(b+c)^2 - a^2\right\} = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot \left\{(b+c+a)(b+c-a)\right\}$, ovvero $\overline{AS}^2 = \frac{4bc.p(p-a)}{(b+c)^2}$, da cui $AS = \frac{2\sqrt{bc.p(p-a)}}{b+c}$. Analogamente si avranno $BT = \frac{2\sqrt{ac.p(p-b)}}{a+c}$, $CU = \frac{2\sqrt{ab.p(p-c)}}{a+b}$.

Rispetto alla bissettrice esterna AS', che taglia in D' la circonferenza circoscritta, i triangoli simili ACD' e ABS' (per avere in A un angolo uguale, e l'angolo $AD'C = ABS'$, misurati l'uno e l'altro da mezzo l'arco ABC) danno la proporzione $AC : AD' :: AS' : AB$, da cui segue il prodotto $AD'.AS' = AC.AB$. Ma $AD' = D'S' - AS'$: perciò $(D'S' - AS').AS' = D'S'.AS' - \overline{AS'}^2 = AC.AB$, e quindi $\overline{AS'}^2 = D'S'.S'A - AC.AB$. D'altronde i triangoli simili $CD'S'$ e ABS' forniscono pur la proporzione $D'S' : CS' :: BS' : AS'$: che dà il prodotto $D'S'.AS' = CS'.BS'$: dunque, sostituendo, viene il valore di $\overline{AS'}^2 = CS'.BS' - AC.AB$; che corrisponde all'altra parte del teorema enunciato. Rimpiazzando le linee del secondo membro per le loro espressioni in a, b, c, risulta quella di $\overline{AS'}^2 = \frac{ba}{b-c} \cdot \frac{ca}{b-c} - bc = bc.\left\{\frac{a^2}{(b-c)^2} - 1\right\} = \frac{bc}{(b-c)^2}.\left\{a^2 - (b-c)^2\right\} = \frac{bc}{(b-c)^2}.\left\{(a+b-c)(a-b+c)\right\}$, ovvero $\overline{AS'}^2 = \frac{4bc.(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}$, da cui $AS' = \frac{2\sqrt{bc.(p-b)(p-c)}}{b-c}$. In pari modo, si troveranno le altre $BT' = \frac{2\sqrt{ac.(p-a)(p-c)}}{a-c}$, $CU' = \frac{2\sqrt{ab.(p-a)(p-b)}}{a-b}$.

Componendo i prodotti delle tre bissettrici di ciascuna specie, si ottengono questi $AS.BT.CU = \frac{8abcp.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(a+b)(a+c)(b+c)}$, ed $AS'.BT'.CU' = \frac{8abc.(p-a)(p-b)(p-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$: ma, per l'impiego di una formola, che si dimostrerà appresso (n.° 30), quale è quella dell'area del triangolo $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, si potranno semplificare i numeratori di queste espressioni, riducendoli il primo ad $8abcpS$, ovvero $8abcp^2r$; ed il secondo ad $8abcrS$, ovvero $8abcpr^2$. In quanto ai denominatori, potrebbero ancora trasformarsi in varj modi; ma ne risulterebbero espressioni meno semplici delle attuali.

Le formole precedenti possono inoltre verificarsi fra loro, mediante i triangoli rettangoli della figura: infatti, essendo tale l'ASS', può vedersi come risulti per esse la somma $\overline{AS}^2+\overline{AS'}^2=\overline{SS'}^2$; e così degli altri. Se non che, facendo il calcolo, vengono ad incontrarsi delle difficoltà di riduzione, che giudico a proposito di sviluppare sull'esempio citato. Si ha da prima la somma $\overline{AS}^2+\overline{AS'}^2=\frac{4bc.p(p-a)}{(b+c)^2}+\frac{4bc.(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}=\frac{4bc}{(b^2-c^2)^2}\cdot\{p(p-a).(b-c)^2+(p-b)(p-c).(b+c)^2\}$. Or divenendo il prodotto $(p-b)(p-c)=p^2-pb-pc+bc=p^2-p(2p-a)+bc=-p^2+pa+bc$, ossia $(p-b)(p-c)=bc-p(p-a)$; si ha così la quantità chiusa nella grappa cangiata in questa
$p(p-a).[(b-c)^2-(b+c)^2]+bc.(b+c)^2=-4bc.p(p-a)+bc.(2p-a)^2$ $=bc.(-4p^2+4pa+4p^2-4pa+a^2)=bc.a^2$; per cui si conchiude detta somma $\overline{AS}^2+\overline{AS'}^2=\frac{4b^2c^2a^2}{(b^2-c^2)^2}=\overline{SS'}^2$; già sapendosi il valore di $SS'=\frac{2abc}{b^2-c^2}$.

Però sarebbero evitate, in questo calcolo, parte delle vedute riduzioni, qualora si adoperino le espressioni prima avute di $\overline{AS}^2$ e $\overline{AS'}^2$; che darebbero al momento la loro somma $\overline{AS}^2+\overline{AS'}^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}+\frac{a^2bc}{(b-c)^2}-bc=a^2bc\cdot\{\frac{1}{(b-c)^2}-\frac{1}{(b+c)^2}\}=\frac{a^2bc}{(b^2-c^2)^2}\cdot\{(b+c)^2-(b-c)^2\}=\frac{4a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2}=\overline{SS'}^2$.

28. — Cogniti i valori delle bissettrici intiere, come AS ed AS', nei tre lati a, b, c del triangolo, si otterranno immediatamente le espressioni di tutte le altre linee enumerate al principio del n.° 25, che si è detto di calcolare.

Da prima le vedute relazioni $AD.AS=AC.AB=bc$, $SD.AS=CS.BS=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$, ci forniscono i valori di $AD=\frac{b+c}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$, ed $SD=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b+c}\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$; come analogamente troverebbersi quelli di $BE=\frac{a+c}{2}\cdot\sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}}$, e $TE=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a+c}\cdot\sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}}$; di $CF=\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}}$, ed $UF=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{a+b}\cdot\sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}}$.

Inoltre i triangoli simili CDS ed ABS dando la proporzione $CD:CS::AB:AS$, ossia la relazione $CD.AS=CS.AB=\frac{abc}{b+c}$, si ricava di qui il valore di $CD=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{\frac{b^2c}{p(p-a)}}$, e conseguentemente le distanze $DG=DG'=DB=DC=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$; siccome si avranno le analoghe $EG=EG''=EA=EC=\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}}$, ed $FG=FG'''=FA=FB=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}}$. Quindi i loro *doppj*, ossia le distanze

$GG'=a\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$, $GG''=b\cdot\sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}}$, $GG'''=c\cdot\sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}}$; che sarebbero quelle del centro del circolo inscritto ai centri dei circoli escritti relativi ai lati a, b, c.

Parimente dalle relazioni $AD'.AS'=AC.AB=bc$, $S'D'.AS'=CS'.BS'=\frac{a^2bc}{(b-c)^2}$, si ricavano i valori di $AD'=\frac{b-c}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$, ed $S'D'=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b-c}\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$; e del pari saranno $BE'=\frac{a-c}{2}\cdot\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}$, e $T'E'=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a-c}\cdot\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}$; $CF'=\frac{a-b}{2}\cdot\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$, ed $U'F'=\frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{a-b}\cdot\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$.

Ancora i triangoli simili $CD'S'$ ed ABS' fornendo la proporzione $CD':CS'::AB:AS'$, ossia la relazione $CD'.AS'=CS'.AB=\frac{abc}{b-c}$, si ottiene il valore di $CD'=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$, e conseguentemente le distanze $D'G''=D'G'''=D'B=D'C=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$; siccome le analoghe $E'G'=E'G'''=E'A=E'C=\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}$, $F'G'=F'G''=F'A=F'B=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$. Quindi i loro *doppj*, ossia le distanze $G''G'''=a\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$, $G'G'''=b\cdot\sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}$, $G'G''=c\cdot\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$; che sarebbero quelle dei centri dei circoli escritti, considerati fra di loro a due a due.

Le rimanenti linee si deducono da queste, per semplici addizioni e sottrazioni, secondo la figura; come è indicato qui appresso.

1.° $AG=AD-DG=\frac{b+c-a}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$, ossia $AG=\sqrt{bc\cdot\frac{p-a}{p}}$; e così $BG=\sqrt{ac\cdot\frac{p-b}{p}}$, $CG=\sqrt{ab\cdot\frac{p-c}{p}}$.

2.° $AG'=AD+DG'=\frac{b+c+a}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$, ossia $AG'=\sqrt{bc\cdot\frac{p}{p-a}}$; e così $BG''=\sqrt{ac\cdot\frac{p}{p-b}}$, $CG'''=\sqrt{ab\cdot\frac{p}{p-c}}$.

3.° $SG=DG-DS=\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$, ossia $SG=\frac{a}{b+c}\cdot\sqrt{bc\cdot\frac{p-a}{p}}$; e così $TG=\frac{b}{a+c}\cdot\sqrt{ac\cdot\frac{p-b}{p}}$, $UG=\frac{c}{a+b}\cdot\sqrt{ab\cdot\frac{p-c}{p}}$.

4.° $SG'=DG'+DS=\frac{a}{b+c}\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}$, ossia $SG'=\frac{a}{b+c}\cdot\sqrt{bc\cdot\frac{p}{p-a}}$; e così $TG''=\frac{b}{a+c}\cdot\sqrt{ac\cdot\frac{p}{p-b}}$, $UG'''=\frac{c}{a+b}\cdot\sqrt{ab\cdot\frac{p}{p-c}}$.

5.° e 6.° $AG''=D'G''+AD'=\frac{a+b-c}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$, ossia $AG''=\sqrt{bc\cdot\frac{p-c}{p-b}}$; ed $AG'''=D'G'''-AD'=\frac{a-b+c}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$, ossia $AG'''=\sqrt{bc\cdot\frac{p-b}{p-c}}$; e così $BG'=\sqrt{ac\cdot\frac{p-c}{p-a}}$, e $BG'''=\sqrt{ac\cdot\frac{p-a}{p-c}}$; $CG'=\sqrt{ab\cdot\frac{p-b}{p-a}}$, e $CG''=\sqrt{ab\cdot\frac{p-a}{p-b}}$.

7.° e 8.° $S'G''=S'D'+D'G''=\frac{a}{b-c}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$, ossia $S'G''=\frac{a}{b-c}\cdot\sqrt{bc\cdot\frac{p-c}{p-b}}$; ed $S'G'''=S'D'-D'G'''=\frac{a}{b-c}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}$, ossia $S'G'''=\frac{a}{b-c}\cdot\sqrt{bc\cdot\frac{p-b}{p-c}}$; e così $T'G'=\frac{b}{a-c}\cdot\sqrt{ac\cdot\frac{p-c}{p-a}}$, e $T'G'''=\frac{b}{a-c}\cdot\sqrt{ac\cdot\frac{p-a}{p-c}}$; $U'G'=\frac{c}{a-b}\cdot\sqrt{ab\cdot\frac{p-b}{p-a}}$, e $U'G''=\frac{c}{a-b}\cdot\sqrt{ab\cdot\frac{p-a}{p-b}}$.

Per molte maniere si possono verificare queste formole fra loro, in riguardo ai triangoli rettangoli della figura, come AGG'', AGG''', BGG', ecc. Per esempio, in questo BGG', si avrebbe la somma $\overline{BG}^2+\overline{BG'}^2=ac\cdot\frac{p-b}{p}+ac\cdot\frac{p-c}{p-a}=\frac{ac}{p(p-a)}\cdot\{(p-a)(p-b)+p(p-c)\}$. Ma la quantità della grappa si riduce alla seguente

$p^2-pa-pb+ab+p^2-pc=2p^2-p(a+b+c)+ab=2p^2-p.2p+ab=ab$;

dunque si conchiude la somma $\overline{BG}^2+\overline{BG'}^2=\frac{a^2bc}{p(p-a)}=\overline{GG'}^2$, come è giusto. In pari modo si verificheranno le altre, avvertendo alle identità:

$$p(p-a)+(p-b)(p-c)=bc,\quad p(p-b)+(p-a)(p-c)=ac,$$
$$p(p-c)+(p-a)(p-b)=ab;$$

alle quali possono aggiungersi le segnenti:

$$p(p-a)+p(p-b)+p(p-c)=p^2;$$
$$(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)=-p^2+ab+ac+bc;$$
$$(p-a)(p-b)(p-c)=-p^3+p(ab+ac+bc)-abc;$$

di cui occorrerà di far uso per il seguito.

29. — Dalle espressioni precedenti delle linee considerate, possono dedursi facilmente i *rapporti* fra le medesime, in ispecie quelli delle bissettrici intiere angolari interne ed esterne alle loro parti, in cui son divise dai centri dei circoli inscritto ed escritti, che contengono: ma preferisco di dimostrare direttamente questi rapporti; partendo dai

quali, si potrebbe ancora pervenire in altro modo alle medesime formole di sopra ottenute.

Considerando i triangoli ACS e ABS, nei quali CG e BG sono le bissettrici degli angoli interni in C e in B; si ha, applicando il principio del n.° 25, la doppia proporzione $AG:GS::AC:CS::AB:BS$. Da questa si deduce successivamente

$$AG+GS:AG:GS::AC+CS:AC:CS::AB+BS:AB:BS$$
$$::AC+CS+AB+BS:AC+AB:CS+BS,$$

ovvero $AS:AG:GS::b+c+a:b+c:a$; che dimostra:

Ciascuna bissettrice angolare interna, e i due segmenti, in cui è divisa dal centro del circolo inscritto, sono direttamente proporzionali alla somma dei tre lati del triangolo, alla somma dei due lati adiacenti, ed al lato opposto.

Del pari le bissettrici angolari esterne CG' e BG' degli stessi triangoli ACS ed ABS, danno luogo alla proporzione $AG':SG'::AC:CS::AB:BS$; dalla quale si ricava successivamente:

$$AG'-SG':AG':SG'::AC-CS:AC:CS::AB-BS:AB:BS$$
$$::AC-CS+AB-BS:AC+AB:CS+BS,$$

ovvero $AS:AG':SG'::b+c-a:b+c:a$; che dimostra pure:

Ciascuna bissettrice angolare interna, e i due segmenti su di essa determinati dal centro del circolo escritto relativo al lato opposto, sono direttamente proporzionali alla somma dei due lati adiacenti diminuita del lato opposto, alla somma dei lati adiacenti, ed al lato opposto.

Considerando invece i due triangoli ACS' e ABS'; nei quali CG''' e BG''' sono le bissettrici degli angoli interni in C e in B; e CG'' e BG'' sono le bissettrici degli angoli esterni agli stessi vertici; si hanno, per il detto principio del n.° 25, le due proporzioni: $AG''':S'G'''::AC:CS'::AB:BS'$; $AG'':S'G''::AC:CS'::AB:BS'$.

Dalla prima si deriva la seguente

$$AG'''+S'G''':AG''':S'G'''::AC+CS':AC:CS'::AB+BS':AB:BS'$$
$$::AC+CS'-AB-BS':AC-AB:CS'-BS',$$

ovvero $AS':AG''':S'G'''::b-c+a:b-c:a$; e dalla seconda quest'altra

$$-AG''+S'G'':AG'':S'G''::-AC+CS':AC:CS'::-AB+BS':AB:BS'$$
$$::-AC+CS'+AB-BS':AC-AB:CS'-BS',$$

ovvero $AS':AG'':S'G''::-b+c+a:b-c:a$; che insieme si enunciano, dicendo:

Ciascuna bissettrice angolare esterna, e i due segmenti su di essa determinati dal centro del circolo escritto relativo ad uno *dei lati*

adiacenti, sono direttamente proporzionali alla differenza fra questo lato e la somma degli altri due, alla differenza dei lati adiacenti, ed al lato opposto.

Scrivendo le ottenute proporzioni, come appresso:

$$\begin{array}{lllll} AS : AG : SG & :: & b+c+a & : & b+c & : & a; \\ AS : AG' : SG' & :: & b+c+(-a) & : & b+c & : & -\{-a\}; \\ AS' : AG''' : S'G''' & :: & b+(-c)+a & : & b+(-c) & : & a; \\ AS' : AG'' : S'G'' & :: & (-b)+c+a & : & -\{(-b)+c\} & : & a; \end{array}$$

si possono tutte comprendere in un solo enunciato:

Ciascuna bissettrice angolare interna od esterna, e i due segmenti su di essa determinati da uno dei centri che contiene, sono direttamente proporzionali alla somma algebrica dei tre lati del triangolo, alla somma algebrica dei due lati adiacenti, ed al terzo lato opposto; prendendo ad ogni volta negativo *quel lato toccato* esternamente *dal circolo, il cui centro si considera: salvo a rendere in seguito* positivo ciascun termine della proporzione, *con un cangiamento ulteriore di segno a tutto il termine, che addivenisse di valor negativo.*

E ciò affine di far poi risultare positivi i rapporti in questione: considerandosi qui tutte le linee, di cui si tratta, nel loro valore assoluto; siccome si è già fatto appunto nel prendere i radicali senza segno, cioè positivamente.

Frattanto dai rapporti così dimostrati, si potrebbero dedurre con facilità i valori dei segmenti in discorso; cogniti quelli delle bissettrici intiere AS ed AS′, come al n.° 27.

30. — Le formole del n.° 28 ci pongono in grado di calcolare, nei tre lati a, b, c del triangolo, i raggi dei circoli considerati intorno ad esso, e la superficie S, dalla quale pure dipendono; il che poi ci sarà mezzo a discoprire delle altre nuove relazioni singolari, esistenti fra le quantità medesime; che andremo svolgendo nei seguenti numeri.

Il triangolo rettangolo AGZ donandoci il raggio del circolo inscritto $r = GZ = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{AZ}^2}$, ovvero $r^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AZ}^2$, si ha questo pertanto $r^2 = bc \cdot \frac{p-a}{p} - (p-a)^2 = \frac{p-a}{p} \cdot \{bc - p(p-a)\}$. Ma l'identità già avvertita $p(p-a) + (p-b)(p-c) = bc$ fornendo la

differenza $bc-p(p-a)=(p-b)(p-c)$, si ottiene così l'espressione di $r^2=\frac{p-a}{p}\cdot(p-b)(p-c)$, e perciò $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Parimente, nel triangolo rettangolo AG'Z', avendosi il raggio $r'^2=\overline{G'Z'}^2=\overline{AG'}^2-\overline{AZ'}^2$, questo diviene $r'^2=bc\cdot\frac{p}{p-a}-p^2=\frac{p}{p-a}\cdot\{bc-p(p-a)\}=\frac{p}{p-a}\cdot(p-b)(p-c)$, onde $r'=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$: e in egual modo si troverà $r''=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$, $r'''=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$.

Quindi, per la quadrupla relazione $S=pr=(p-a)r'=(p-b)r''=(p-c)r'''$, si conchiude da ciascuna l'area $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; che darà cognito ancora il raggio del circolo circoscritto $R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$; e d'altronde quello del circolo medioscritto $\rho=\frac{1}{2}R$.

Potendosi avere S direttamente per altri modi, come si vedrà in seguito; ovvero conchiusa la sua espressione da quella di un solo dei raggi r, r', r'', r'''; si otterrebbero pure da essa al momento gli altri raggi, per le stesse dette relazioni: le quali ancora ci portano, coll'impiego di tal formola S, ad altre rimarchevoli conseguenze.

Riuscendo il prodotto dei quattro raggi $rr'r''r'''=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2$, si ha così l'area $S=\sqrt{rr'r''r'''}$: ed inoltre, potendosi scrivere lo stesso prodotto

$rr'r''r'''=S.S=S.pr=S.(p-a)r'=S.(p-b)r''=S.(p-c)r'''$,

conchiudesi del pari la superficie

$$S=\frac{r'r''r'''}{p}=\frac{rr''r'''}{p-a}=\frac{rr'r'''}{p-b}=\frac{rr'r''}{p-c}.$$

Invece ponendo tal prodotto

$$rr'r''r'''=S^2=p^2r^2=(p-a)^2r'^2=(p-b)^2r''^2=(p-{}^2c)r'''^2,$$

ne risultano i valori dei rapporti

$$\frac{r'r''r'''}{r}=p^2,\ \frac{rr''r'''}{r'}=(p-a)^2,\ \frac{rr'r'''}{r''}=(p-b)^2,\ \frac{rr'r''}{r'''}=(p-c)^2.$$

Dalle ultime espressioni di S, deducesi la somma dei prodotti $r'r''r'''+rr''r'''+rr'r'''+rr'r''=S(p+p-a+p-b+p-c)=S.2p=2pS$: ma si potrà ancora avere questa in altro modo, insieme alle somme dei prodotti a due a due di tali raggi, e le somme dei raggi semplici, e dei loro quadrati, che si vanno a calcolare.

31. — Combinando per addizione, a tre a tre, i rapporti inversi di detti raggi all'unità, cioè i rapporti $\frac{1}{r}=\frac{p}{S}$, $\frac{1}{r'}=\frac{p-a}{S}$, $\frac{1}{r''}=\frac{p-b}{S}$,

$\frac{1}{r'''}=\frac{p-c}{S}$; si ottengono le somme: $\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=\frac{p}{S}=\frac{p^2}{r'r''r'''}$; $\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=\frac{p+a}{S}=\frac{p^2-a^2}{r\,r''r'''}$; $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'''}=\frac{p+b}{S}=\frac{p^2-b^2}{r\,r'r'''}$; $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}=\frac{p+c}{S}=\frac{p^2-c^2}{r\,r'r''}$; dalle quali seguono al momento quelle dei prodotti a due a due:

$$r'r''+r'r'''+r''r'''=p^2; \qquad r\,r''+r\,r'''+r''r'''=p^2-a^2;$$
$$r\,r'+r\,r'''+r'r'''=p^2-b^2; \quad r\,r'+r\,r''+r'r''=p^2-c^2.$$

Quindi, per la riunione di tutte insieme, ridotta, e divisa per 2, si conchiude la seguente

$$rr'+rr''+rr'''+r'r''+r'r'''+r''r'''=2p^2-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=ab+ac+bc;$$

avvertito che $4p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, onde $2p^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=ab+ac+bc$. Ma ponendo, come si è convenuto al n.° 20, la somma dei quadrati dei lati $a^2+b^2+c^2=2q$, si esprimerà la stessa con $2p^2-q$: ed inoltre verrà pur dessa a indicarsi semplicemente colla lettera m, che si addotterà da qui innanzi per rappresentare la somma distinta $ab+ac+bc$.

Dalla prima somma testè calcolata $\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$, seguendone questa $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=2\frac{1}{r}=\frac{2p}{S}=\frac{2p\,.\,S}{r\,r'r''r'''}$; ne deriva pure la somma dei prodotti a tre a tre, come sopra, uguale a $2pS$.

Passiamo alla somma dei raggi semplici r, r', r'', r''': si ha questa

$$r+r'+r''+r'''=S\cdot\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right\}=S\cdot\left\{\frac{b+c}{p(p-a)}+\frac{a}{(p-b)(p-c)}\right\}$$
$$=S\cdot\left\{\frac{(b+c)(p-b)(p-c)+a\left[bc-(p-b)(p-c)\right]}{S^2}\right\}=\frac{1}{S}\cdot\left\{abc+(b+c-a)(p-b)(p-c)\right\}$$
$$=\frac{abc}{S}+\frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{S}=\frac{abc}{S}+2\frac{S}{p}=4R+2r:$$

quindi, levando $2r$ da ambe le parti, risulta la notevole relazione $-r+r'+r''+r'''=4R$, che dimostra il raggio del circolo circoscritto $R=\frac{1}{4}(r'+r''+r'''-r)$: ma questa può dedursi direttamente, con calcolo più breve dell'ora compiuto; avendosi infatti

$$-r+r'+r''+r'''=S\cdot\left\{\frac{-1}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right\}=S\cdot a\cdot\left\{\frac{1}{p(p-a)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}\right\}$$
$$=S\,a\cdot\frac{bc}{S^2}=\frac{abc}{S}=4\,R.$$

Formando le somme analoghe, in cui sia preso invece negativo uno degli altri raggi, si trovano desse ridotte come segue:

$$r-r'+r''+r'''=S\cdot\left\{\frac{1}{p}+\frac{-1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right\}=S\cdot a\cdot\left\{\frac{-1}{p(p-a)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}\right\}$$
$$=Sa\cdot\left\{\frac{-bc+2p(p-a)}{S^2}\right\}=-\frac{abc}{S}+2ap\cdot\frac{p-a}{S}=-4R+\frac{2pa}{r'};$$

e del pari $r+r'-r''+r'''=-4R+\frac{2pb}{r''}$, $r+r'+r''-r'''=-4R+\frac{2pc}{r'''}$.

Riunendo insieme queste ultime quattro somme, e dividendo per 2, viene l'equazione $r+r'+r''+r'''=-4R+p\left(\frac{a}{r'}+\frac{b}{r''}+\frac{c}{r'''}\right)$, da cui si ricava il valore della quantità, che si vedrà comparire in altra formola: $p\left(\frac{a}{r'}+\frac{b}{r''}+\frac{c}{r'''}\right)=8R+2r$, già essendo $r+r'+r''+r'''=4R+2r$.

Cerchiamo a comporre la somma dei quadrati dei medesimi raggi. Sviluppando l'equazione $(r+r'+r''+r''')^2=(4R+2r)^2$, e rimpiazzando nel primo membro la somma dei prodotti a due a due pel suo valore precedente, si ottiene questa $r^2+r'^2+r''^2+r'''^2+4p^2-2q=(4R+2r)^2$, dalla quale segue la somma $r^2+r'^2+r''^2+r'''^2=16R^2+16Rr+4r^2-4p^2+2q$. Invece, elevando al quadrato l'equazione $-r+r'+r''+r'''=4R$; ed avvertendo che si ha la somma dei prodotti a due a due $-rr'-rr''-rr'''+r'r''+r'r'''+r''r'''=-r.(4R+r)+p^2$; si perviene al valore della stessa somma $r^2+r'^2+r''^2+r'''^2=16R^2+8Rr+2r^2-2p^2$. Confrontando queste due espressioni fra di loro, si rileva che dovrà dunque aversi la relazione $8Rr+2r^2-2p^2+2q=0$, ossia $4Rr+r^2-p^2+q=0$; dalla quale segue $p^2=4Rr+r^2+q$, ovvero $q=p^2-4Rr-r^2$. Eliminando il p^2 dall'una o dall'altra delle medesime espressioni, si ottiene la seguente più semplificata $r^2+r'^2+r''^2+r'''^2=16R^2-2q$.

32. — La relazione testè avvertita $p^2=4Rr+r^2+q$ risulterebbe pure da altre combinazioni delle formole precedenti; come, in esempio, da questa:

$$\left.\begin{array}{l}(rr''+rr'''+r''r''')+(rr'+rr'''+r'r''')\\+(rr'+rr''+r'r'')-(r'r''+r'r'''+r''r''')\end{array}\right\}=3p^2-(a^2+b^2+c^2)-p^2,$$

che si riduce a $2rr'+2rr''+2rr'''=2p^2-2q$, ossia $r(r'+r''+r''')=p^2-q$, e diviene $r(4R+r)$ cioè $4Rr+r^2=p^2-q$, atteso $r'+r''+r'''=4R+r$.

Si trova invece la seguente somma:

$$\left.\begin{array}{l}(r'r''+r'r'''+r''r''')+(rr'+rr'''+r'r''')\\+(rr'+rr''+r'r'')-(rr''+rr'''+r''r''')\end{array}\right\}=3p^2-(b^2+c^2-a^2)-p^2,$$

che riducesi a $2rr'+2r'r''+2r'r'''=2p^2-2(q-a^2)$, ossia $r'(r+r''+r''')=p^2-(q-a^2)$. Ma $r+r''+r'''=-4R+r'+\frac{2pa}{r'}$: dunque $-4Rr'+r'^2+2pa=p^2-q+a^2$, ovvero $-4Rr'+r'^2=(p-a)^2-q$: e in pari modo si otterrebbero le relazioni analoghe

$$-4Rr''+r''^2=(p-b)^2-q, \quad \text{e} \quad -4Rr'''+r'''^2=(p-c)^2-q.$$

Riunendole insieme, risulta l'equazione

$$-4R(-r+r'+r''+r''')+r^2+r'^2+r''^2+r'''^2$$
$$=p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2-4q.$$

Ma $-r+r'+r''+r'''=4R$: d'altronde la quantità

$$p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2=4p^2-2p(a+b+c)+a^2+b^2+c^2=2q:$$

dunque si conchiude ancora, come sopra, la somma

$$r^2+r'^2+r''^2+r'''^2=16R^2-2q.$$

33. — Le ottenute relazioni fra p e q, ed i raggi R, r, r', r'', r''', incontrandosi di frequente ad applicarsi, come mezzi di trasformazione, nei calcoli di simil genere; giudico non inutile di stabilirle direttamente, per le stesse espressioni primitive delle quantità di cui si compongono; onde far meglio vedere in origine la loro giusta derivazione, ed il legame che presentano fra di loro ad un tempo.

Da prima si osservi che gli sviluppi dei quadrati

$$4p^2 \quad =(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(\;ab+ac+bc),$$
$$4(p-a)^2=(-a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab-ac+bc),$$
$$4(p-b)^2=(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(-ab+ac-bc),$$
$$4(p-c)^2=(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2(\;ab-ac-bc),$$

forniscono all'istante le seguenti espressioni della quantità

$q=2p^2-m=2(p-a)^2-m'=2(p-b)^2-m''=2(p-c)^2-m'''$,

ponendo

$m=ab+ac+bc$, $m'=-ab-ac+bc$, $m''=-ab+ac-bc$, $m'''=ab-ac-bc$. Osservando che $m+m'+m''+m'''=0$, si dedurrebbe di qui pure la somma $p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2=2q$, come si è trovato di sopra.

Ciò posto, viene ora lo sviluppo del seguente rapporto

$$\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)=-p^3+pm-abc$$
$$=-p^3+p(2p^2-q)-4RS=p^3-pq-4pRr;$$

donde, dividendo per p, segue $\frac{S^2}{p^2}$ ossia $r^2=p^2-q-4Rr$, e pertanto $q=p^2-4Rr-r^2$.

Parimente si trova il rapporto

$$\frac{S^2}{p-a}=p(p-b)(p-c)=(p-a+a)[bc-p(p-a)]$$
$$=(p-a)bc+abc-p^2(p-a)=(p-a)(bc-p^2)+4RS.$$

Ma la quantità $bc-p^2=bc-(p-a+a)^2=bc-(p-a)^2-2(p-a)a-a^2$ $=bc-(p-a)^2-(2p-2a+a)a=bc-(p-a)^2-(b+c)a$ $=bc-(p-a)^2-ab-ac$, ossia $bc-p^2=-(p-a)^2+m'=$ $-(p-a)^2+2(p-a)^2-q=(p-a)^2-q$: dunque, sostituendo, viene $\frac{S^2}{p-a}=(p-a)^3-(p-a)q+4R.(p-a)r'$; e, dividendo per $p-a$ da ambe le parti, $\frac{S^2}{(p-a)^2}$ cioè $r'^2=(p-a)^2-q+4Rr'$, da cui si ricava ancora $q=(p-a)^2+4Rr'-r'^2$.

Analogamente si dimostreranno le altre formole relative ad r'', ad r'''; che si dedurrebbero d'altronde da questa, cangiando a in b, in c, ad un tempo che r' in r'', in r''': dunque si conchiude la quadrupla relazione

$$q=p^2-4Rr-r^2 \qquad =(p-a)^2+4Rr'-r'^2$$
$$=(p-b)^2+4Rr''-r''^2=(p-c)^2+4Rr'''-r'''^2.$$

Facendone la somma, trovasi ancora, coll'ajuto delle precedenti, la somma dei quadrati dei raggi r, r', r'', r''', uguale a $16R^2-2q$.

34. — Cogniti i raggi r, r', r'', r''' dei circoli inscritto ed escritti, quali son dati dalle formole del n.° 30; si possono questi introdurre nelle formole del n.° 28, specialmente in quelle, che esprimono le distanze dei loro centri a due a due, ed ai vertici del triangolo ABC: per la quale trasformazione, diverranno allora esse suscettibili di un enunciato generale, quanto semplice ad un tempo; come si va a far conoscere.

Avendosi i rapporti $\frac{p}{p-a}=\frac{r'}{r}$, $\frac{p-b}{p-c}=\frac{r'''}{r''}$, e così i loro *analoghi*, ed *inversi;* ne seguono le espressioni delle distanze:

$$AG=\sqrt{\frac{bcr}{r'}},\ AG'=\sqrt{\frac{bcr'}{r}},\ AG''=\sqrt{\frac{bcr''}{r'''}},\ AG'''=\sqrt{\frac{bcr'''}{r''}};$$

$$BG=\sqrt{\frac{acr}{r''}},\ BG'=\sqrt{\frac{acr'}{r'''}},\ BG''=\sqrt{\frac{acr''}{r}},\ BG'''=\sqrt{\frac{acr'''}{r'}};$$

$$CG=\sqrt{\frac{abr}{r'''}},\ CG'=\sqrt{\frac{abr'}{r''}},\ CG''=\sqrt{\frac{abr''}{r'}},\ CG'''=\sqrt{\frac{abr'''}{r}};$$

le quali si enunciano come segue:

La distanza di ogni centro di circolo inscritto od escritto a un vertice del triangolo, è uguale alla radice quadrata del prodotto dei lati adiacenti a questo vertice, moltiplicato pel raggio di esso circolo, e diviso pel raggio dell' altro circolo, il cui centro si trova sulla stessa bissettrice.

Parimente, essendo i prodotti $p(p-a)=\frac{S^2}{rr'}=r''r'''$, $(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{r''r'''}=rr'$, e così gli altri analoghi a questi; si ottengono le distanze:

$$GG'=\frac{a}{S}\cdot\sqrt{bcrr'}=a\cdot\sqrt{\frac{bc}{r''r'''}},\qquad G''G'''=\frac{a}{S}\cdot\sqrt{bcr''r'''}=a\cdot\sqrt{\frac{bc}{rr'}},$$

$$GG''=\frac{b}{S}\cdot\sqrt{acrr''}=b\cdot\sqrt{\frac{ac}{r'r'''}},\qquad G'G'''=\frac{b}{S}\cdot\sqrt{acr'r'''}=b\cdot\sqrt{\frac{ac}{rr''}},$$

$$GG'''=\frac{c}{S}\cdot\sqrt{abrr'''}=c\cdot\sqrt{\frac{ab}{r'r''}};\qquad G'G''=\frac{c}{S}\cdot\sqrt{abr'r''}=c\cdot\sqrt{\frac{ab}{rr'''}};$$

che pur si enunciano dicendo:

La distanza di due centri dei circoli inscritto ed escritti, è uguale al rapporto del lato interposto, o del lato opposto, all' area del triangolo, moltiplicato per la radice quadrata del prodotto degli altri due lati e dei due raggi a quei centri corrispondenti; ovvero è uguale al lato interposto, od opposto, moltiplicato per la radice quadrata del prodotto degli altri due lati, diviso dal prodotto dei raggi a quei centri non-corrispondenti.

Inoltre avendosi le espressioni $\frac{a}{S}\sqrt{bcrr'}=\sqrt{\frac{a^2bcrr'}{S^2}}=\sqrt{\frac{a.4Rrr'}{S}}=\sqrt{\frac{a.4Rr'}{p}}=\sqrt{\frac{4R}{p}}.\sqrt{ar'}$, $a\sqrt{\frac{bc}{rr'}}=\sqrt{\frac{a.4R.pr}{rr'}}=\sqrt{4Rp}.\sqrt{\frac{a}{r'}}$, e così le altre analoghe; potranno scriversi le distanze:

$$GG'=\sqrt{\frac{4R}{p}}\cdot\sqrt{ar'},\quad GG''=\sqrt{\frac{4R}{p}}\cdot\sqrt{br''},\quad GG'''=\sqrt{\frac{4R}{p}}\cdot\sqrt{cr'''};$$

$$G''G'''=\sqrt{4Rp}\cdot\sqrt{\frac{a}{r'}},\quad G'G'''=\sqrt{4Rp}\cdot\sqrt{\frac{b}{r''}},\quad G'G''=\sqrt{4Rp}\cdot\sqrt{\frac{c}{r'''}};$$

che danno luogo ai due seguenti enunciati:

1.° *La distanza del centro del circolo inscritto ad ogni centro di circolo escritto, è uguale alla radice quadrata del prodotto del lato interposto pel raggio di questo circolo escritto suo relativo, moltiplicata pel fattore costante* $\sqrt{\frac{4R}{p}}$.

2.° *La distanza dei centri di due circoli escritti, è uguale alla radice quadrata del rapporto del lato opposto al raggio del terzo circolo escritto suo relativo, moltiplicata pel fattore costante* $\sqrt{4Rp}$.

35. — Dalle precedenti formole, derivano tosto le relazioni qui appresso, accompagnate dai rispettivi enunciati.

1.° $AG.AG'.AG''.AG'''=b^2c^2$, $BG.BG'.BG''.BG'''=a^2c^2$,
$CG.CG'.CG''.CG'''=a^2b^2$;

Il prodotto delle distanze dei quattro centri dei circoli inscritto ed escritti, a uno stesso vertice del triangolo, è uguale al prodotto dei quadrati dei due lati adiacenti a questo vertice.

2.° $AG . BG . CG = \frac{abcr}{p} = 4Rr^2$, $AG' . BG' . CG' = \frac{abcr'}{p-a} = 4Rr'^2$,
$AG'' . BG'' . CG'' = \frac{abcr''}{p-b} = 4Rr''^2$, $AG''' . BG''' . CG''' = \frac{abcr'''}{p-c} = 4Rr'''^2$;

Il prodotto delle distanze dei tre vertici del triangolo a uno stesso centro di circolo inscritto od escritto, è uguale al quadrato del diametro di questo circolo, moltiplicato pel raggio del circolo circoscritto.

3.° $GG' . GG'' . GG''' = 16R^2 . r$, $G'G . G'G'' . G'G''' = 16R^2 . r'$,
$G''G . G''G' . G''G''' = 16R^2 . r''$, $G'''G . G'''G' . G'''G'' = 16R^2 . r'''$;

Il prodotto delle distanze di tre centri dei circoli inscritto ed escritti, al quarto centro, è uguale a sedici volte il prodotto del raggio corrispondente a quest'ultimo, pel quadrato del raggio del circolo circoscritto.

4.° $GG' . GG'' . G'G'' = 16R^2 . (p-c)$, $GG' . GG''' . G'G''' = 16R^2 . (p-b)$,
$GG'' . GG''' . G''G''' = 16R^2 . (p-a)$, $G'G'' . G'G''' . G''G''' = 16R^2 . p$;

Il prodotto delle distanze di tre centri dei circoli inscritto ed escritti, fra di loro, è uguale a sedici volte il prodotto del segmento relativo al quarto centro, pel quadrato del raggio del circolo circoscritto.

In particolare:

Il prodotto delle distanze dei tre centri dei circoli escritti, è uguale a sedici volte il prodotto del semiperimetro pel quadrato del raggio del circolo circoscritto.

5.° Le distanze testè considerate essendo in ordine i lati dei quattro triangoli GG′G″, GG′G‴, GG″G‴, G′G″G‴; l'ultimo dei quali sarebbe quello delle bisettrici angolari esterne di ABC; e i tre primi quelli risultanti dalle sue tre altezze G′A, G″B, G‴C, che si incontrano in G; può proporsi di calcolare, in funzione di a, b, c, i perimetri e le aree dei medesimi; ed altre quantità che ne dipendano. In quanto ai perimetri, essi vengono direttamente espressi come segue:

$$GG' + GG'' + G'G'' = \sqrt{\frac{abc}{r'''}} . \left\{ \sqrt{\frac{a}{r''}} + \sqrt{\frac{b}{r'}} + \sqrt{\frac{c}{r}} \right\};$$

$$GG' + GG''' + G'G'' = \sqrt{\frac{abc}{r''}} . \left\{ \sqrt{\frac{a}{r'''}} + \sqrt{\frac{b}{r}} + \sqrt{\frac{c}{r'}} \right\};$$

$$GG'' + GG''' + G''G''' = \sqrt{\frac{abc}{r'}} . \left\{ \sqrt{\frac{a}{r}} + \sqrt{\frac{b}{r'''}} + \sqrt{\frac{c}{r''}} \right\};$$

$$G'G'' + G'G''' + G''G''' = \sqrt{\frac{abc}{r}} . \left\{ \sqrt{\frac{a}{r'}} + \sqrt{\frac{b}{r''}} + \sqrt{\frac{c}{r'''}} \right\};$$

e non sarebbero suscettibili di ulteriori semplificazioni. Rispetto alle superficie, si trova:

$$\mathrm{G\,G'\,G''} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G'\,G''}\,.\,\mathrm{G\,C} = \tfrac{1}{2}\,c\cdot\tfrac{a\,b}{r'''} = \tfrac{a\,b\,c}{2r'''} = 2R\,.(p-c);$$

$$\mathrm{G\,G'\,G'''} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G'\,G'''}\,.\,\mathrm{G\,B} = \tfrac{1}{2}\,b\cdot\tfrac{a\,c}{r''} = \tfrac{a\,b\,c}{2\,r''} = 2R\,.(p-b);$$

$$\mathrm{G\,G''G'''} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G''G'''}\,.\,\mathrm{G\,A} = \tfrac{1}{2}\,a\cdot\tfrac{b\,c}{r'} = \tfrac{a\,b\,c}{2\,r'} = 2R\,.(p-a);$$

$$\mathrm{G'G''G'''} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G''G'''}\,.\,\mathrm{G'A} = \tfrac{1}{2}\,a\cdot\tfrac{b\,c}{r} = \tfrac{a\,b\,c}{2r} = 2R\,.p;$$

che si enunciano, dicendo:

L'area di ogni triangolo determinato da tre dei centri dei circoli inscritto ed escritti ad un triangolo dato, è espressa dal prodotto dei tre lati di quest' ultimo, diviso per il diametro del circolo corrispondente al quarto centro; ovvero *è uguale al prodotto del segmento relativo al quarto centro, moltiplicato per il diametro del circolo circoscritto.*

In particolare:

L'area del triangolo compreso fra le bissettrici angolari esterne di un triangolo dato, è uguale al prodotto dei tre lati di questo, diviso per il diametro del suo circolo inscritto; ovvero *è uguale al semiperimetro del medesimo dato, moltiplicato per il diametro del suo circolo circoscritto.*

Se si calcolano ora, per la formola generale del n.° 24, i raggi dei circoli circoscritti a ciascuno dei triangoli G G'G'', G G'G''', G G''G''', G'G''G''', si trovano immediatamente tutti questi raggi uguali a $2R$; e così *uguali fra loro*, e *doppj* ciascuno del raggio R di ABC: e ciò ben si accorda con quanto si è osservato al n.° 19, e parimente ai n.ⁱ 9 e 10; avvertito che R sarebbe a un tempo il raggio del circolo medioscritto comune di detti triangoli medesimi.

36. — Delle distanze *analoghe*, di cui si son fatti i prodotti nel precedente numero, andremo ora a comporre invece le somme dei quadrati rispettivi: ma converrà, in questi calcoli, adoperare di preferenza le formole prime del n.° 28, che più direttamente si prestano alle dovute riduzioni.

1.° Si ha la somma

$$\overline{\mathrm{AG}}^2 + \overline{\mathrm{AG'}}^2 + \overline{\mathrm{AG''}}^2 + \overline{\mathrm{AG'''}}^2 = bc\cdot\left\{\tfrac{p-a}{p} + \tfrac{p}{p-a} + \tfrac{p-c}{p-b} + \tfrac{p-b}{p-c}\right\}.$$

Dicendo H la quantità chiusa nella grappa, di cui si riducano i termini allo stesso denominatore $p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2$; si avrà la somma dei numeratori:

$S^2 . H = [(p-a)^2 + p^2] . (p-b)(p-c) + [(p-c)^2 + (p-b)^2] . p(p-a)$ $= [2p(p-a) + a^2] . [bc - p(p-a)] + [-2p(p-a) + b^2 + c^2] . p(p-a)$ $= a^2bc + p(p-a) . \{ 2bc - 2p(p-a) - a^2 - 2p(p-a) + b^2 + c^2 \} = a^2bc$; divenendo la nuova grappa uguale a *zero*, atteso $(b+c)^2 - a^2$ $= (b+c+a)(b+c-a) = 4p(p-a)$: onde segue $H = \frac{a^2bc}{S^2}$; e pertanto la detta somma $= bc . H = \frac{a^2b^2c^2}{S^2} = \frac{16 R^2 S^2}{S^2} = 16 R^2$, o cioè $\overline{AG}^2 + \overline{AG'}^2 + \overline{AG''}^2 + \overline{AG'''}^2 = 16 R^2$.

A questo risultato si può pervenire semplicemente per la figura; valendosi però all'uopo di altre relazioni già dimostrate. Infatti avendosi $\overline{AG}^2 = r^2 + (p-a)^2$, $\overline{AG'}^2 = r'^2 + p^2$, $\overline{AG''}^2 = r''^2 + (p-c)^2$, $\overline{AG'''}^2 = r'''^2 + (p-b)^2$, ne viene tosto la somma $\overline{AG}^2 + \overline{AG'}^2 + \overline{AG''}^2 + \overline{AG'''}^2$ $= r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + (p-a)^2 + p^2 + (p-c)^2 + (p-b)^2$ $= 16R^2 - 2q + 2q = 16 R^2$. Saranno parimente ugualia $16 R^2$ le somme dei quadrati delle distanze di B e C, ai quattro centri G, G', G'', G''': e quindi la somma dei quadrati di tutte le dodici distanze sarà uguale a $48 R^2$.

2.° Si ha la somma $\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = \frac{bc(p-a)}{p} + \frac{ac(p-b)}{p} + \frac{ab(p-c)}{p} = \frac{N}{p}$; dove $N = (bc + ac + ab) p - 3abc = m.p - 3.4Rpr$, e così $\frac{N}{p} = m - 12Rr$, che diviene $\frac{N}{p} = 2p^2 - q - 12Rr = 2q + 8Rr$ $+ 2r^2 - q - 12Rr = q - 4Rr + 2r^2$, ovvero $= 2q - p^2 + 3r^2$: onde tale somma $\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = q - 4Rr + 2r^2 = 2q - p^2 + 3r^2$. Per la figura, si avrebbe al momento la stessa $= r^2 + (p-a)^2 + r^2$ $+ (p-b)^2 + r^2 + (p-c)^2 = 3r^2 + 2q - p^2$.

Si ha parimente la somma $\overline{AG'}^2 + \overline{BG'}^2 + \overline{CG'}^2 = \frac{bcp}{p-a} + \frac{ac(p-c)}{p-a} + \frac{ab(p-b)}{p-a}$ $= \frac{N'}{p-a}$; dove $N' = (bc + ac + ab) p - ac^2 - ab^2 = mp - ab^2 - ac^2$. Ma potendo scriversi $m = m' + 2ab + 2ac = m' + 2a(b+c)$, si trasforma successivamente il prodotto $mp = m'(p-a+a) + 2a(b+c)p$ $= m'(p-a) + a . \{ m' + 2p(b+c) \} = m'(p-a) + a . \{ 3bc + b^2 + c^2 \}$; onde segue $N' = m'(p-a) + 3.4RS$, ed $\frac{N'}{p-a} = m' + 12Rr'$ $= 2(p-a)^2 - q + 12Rr' = 2q - 8Rr' + 2r'^2 - q + 12Rr'$ $= q + 4Rr' + 2r'^2$, od ancora $= 2q - (p-a)^2 + 3r'^2$: dunque si conchiude la somma $\overline{AG'}^2 + \overline{BG'}^2 + \overline{CG'}^2 = q + 4Rr' + 2r'^2$ $= 2q - (p-a)^2 + 3r'^2$. Sulla figura, verrebbe la stessa $= r'^2 + p^2$ $+ r'^2 + (p-c)^2 + r'^2 + (p-b)^2 = 3r'^2 + 2q - (p-a)^2$. Si avranno allo stesso modo le altre formole relative a G'', e a G'''; che si dedur-

rebbero pur da questa, cangiando r' in r'', in r''', ad un tempo che a in b, in c: e può vedersi come la somma dei quadrati delle dodici distanze si ridurrebbe qui ancora uguale a $48R^2$; siccome vien subito dal punto 1.°

3.° Si ha la somma $\overline{GG'}^2+\overline{GG''}^2+\overline{GG'''}^2=\frac{abc}{p}\cdot\left\{\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-b}\right\}$ $=\frac{abc}{S^2}.M$, dove $M=a(p-b)(p-c)+b(p-a)(p-c)+c(p-a)(p-b)$ $=a[bc-p(p-a)]+b[ac-p(p-b)]+c[ab-p(p-c)]$ $=5\,abc-p(ap-a^2+bp-b^2+cp-c^2)=3\,abc-p(2p^2-2q)$ $=3abc-2p(p^2-q)$; per cui il prodotto $\frac{abc}{S^2}\cdot M=\frac{3a^2b^2c^2}{S^2}-\frac{2abcp(p^2-q)}{S^2}$ $=\frac{3.16R^2S^2}{S^2}-\frac{2.4RS.p(4Rr+r^2)}{S.pr}=48R^2-8R(4R+r)=16R^2-8Rr$: dunque $\overline{GG'}^2+\overline{GG''}^2+\overline{GG'''}^2=8R(2R-r)$.

Parimente la somma $\overline{G'G}^2+\overline{G'G''}^2+\overline{G'G'''}^2=\frac{abc}{p-a}\cdot\left\{\frac{a}{p}+\frac{c}{p-b}+\frac{b}{p-c}\right\}$ $=\frac{abc}{S^2}.M'$, dove $M'=a[bc-p(p-a)]+cp(p-c)+bp(p-b)$ $=abc+p(-ap+a^2+cp-c^2+bp-b^2)=abc+p.\{2p(p-a)-2q+2a^2\}$ $=abc+2p^2(p-a)-2pq+2pa^2$. Ma, posto $p=p-a+a$, si ha $p^2=(p-a)^2+a(b+c)$, e $pq=(p-a)q+aq$: dunque viene, sostituendo, $M'=abc+2(p-a)[(p-a)^2-q]+a\{2(p-a)(b+c)$ $-2q+2pa\}=abc+2(p-a)(-4Rr'+r'^2)+a.2bc$; e quindi il prodotto $\frac{abc}{S^2}\cdot M'=\frac{3a^2b^2c^2}{S^2}+\frac{2abc(p-a).(-4R+r')r'}{S.(p-a)r'}=48R^2$ $+8R(-4R+r')=16R^2+8Rr'$, vale a dire la somma $\overline{G'G}^2+\overline{G'G''}^2+\overline{G'G'''}^2=8R(2R+r')$. In pari modo, si otterranno le altre relative a G'', a G'''; che seguirebbero da questa, cangiando r' in r'', in r'''.

Anche questi risultati si possono confermare, mediante la figura. Infatti, valendosi qui delle formole del n.° 34, si avrebbero al presente le somme

$$\overline{GG'}^2+\overline{GG''}^2+\overline{GG'''}^2=\frac{abcr}{S^2}\,(ar'+br''+cr'''),$$
$$\overline{G'G}^2+\overline{G'G''}^2+\overline{G'G'''}^2=\frac{abcr'}{S^2}\,(ar+br'''+cr''),$$
$$\overline{G''G}^2+\overline{G''G'}^2+\overline{G''G'''}^2=\frac{abcr''}{S^2}\,(ar'''+br+cr'),$$
$$\overline{G'''G}^2+\overline{G'''G'}^2+\overline{G'''G''}^2=\frac{abcr'''}{S^2}\,(ar''+br'+cr).$$

Ma dividendo per 2 tutti i termini delle parentesi, e rimpiazzando

essi coi triangoli della figura, di cui vengono a esprimer l'area; trovasi il valore di ciascun trinomio trasformato come segue:

$$\tfrac{1}{2}ar' + \tfrac{1}{2}br'' + \tfrac{1}{2}cr''' = \mathrm{BCG'} + \mathrm{ACG''} + \mathrm{ABG'''} = \mathrm{G'G''G'''} - \mathrm{ABC}$$
$$= 2pR - pr = p(2R - r);$$
$$\tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br''' + \tfrac{1}{2}cr'' = \mathrm{BCG} + \mathrm{ACG'''} + \mathrm{ABG''} = \mathrm{GG''G'''} + \mathrm{ABC}$$
$$= 2(p-a)R + (p-a)r' = (p-a)(2R + r');$$
$$\tfrac{1}{2}ar''' + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr' = \mathrm{BCG'''} + \mathrm{ACG} + \mathrm{ABG'} = \mathrm{GG'G'''} + \mathrm{ABC}$$
$$= 2(p-b)R + (p-b)r'' = (p-b)(2R + r'');$$
$$\tfrac{1}{2}ar'' + \tfrac{1}{2}br' + \tfrac{1}{2}cr = \mathrm{BCG''} + \mathrm{ACG'} + \mathrm{ABG} = \mathrm{GG'G''} + \mathrm{ABC}$$
$$= 2(p-c)R + (p-c)r''' = p-c)(2R + r''').$$

D'altronde i fattori esterni $\frac{abcr}{S^2} = \frac{4RS.r}{S.pr} = \frac{4R}{p}$; $\frac{abcr'}{S^2} = \frac{4RS.r'}{S.(p-a)r'} = \frac{4R}{p-a}$, $\frac{abcr''}{S^2} = \frac{4R}{p-b}$, $\frac{abcr'''}{S^2} = \frac{4R}{p-c}$: dunque, sostituendo, e moltiplicando per 2, in compenso della divisione fatta, si conchiudono le somme indicate *uguali*, in ordine, *ai prodotti* $8R(2R-r)$, $8R(2R+r')$, $8R(2R+r'')$, $8R(2R+r''')$.

Facendo la somma generale di queste quattro somme parziali, si ottiene essa così espressa da $8R(8R-r+r'+r''+r''') = 8R(8R+4R) = 8R.12R$; onde, dividendo per 2 da ambe le parti, conchiudesi pure la seguente somma:

$$\overline{\mathrm{GG'}}^2 + \overline{\mathrm{GG''}}^2 + \overline{\mathrm{GG'''}}^2 + \overline{\mathrm{G'G''}}^2 + \overline{\mathrm{G'G'''}}^2 + \overline{\mathrm{G''G'''}}^2 = 48R^2;$$

che dimostra:

La somma dei quadrati delle sei distanze fra i quattro centri dei circoli inscritto ed escritti ad un triangolo dato, è uguale a quarantotto volte il quadrato del raggio del suo circolo circoscritto.

4.° Si ha la somma $\overline{\mathrm{GG'}}^2 + \overline{\mathrm{GG''}}^2 + \overline{\mathrm{G'G''}}^2 = abc.\left\{\frac{a}{p(p-a)} + \frac{b}{p(p-b)} + \frac{c}{(p-a)(p-b)}\right\} = \frac{abc.(p-c)}{S^2}.L'''$, dove $L''' = a(p-b) + b(p-a) + cp = (a+b+c)p - ab - ab = 2p^2 - 2ab = 2(p^2 - ab)$. Ma essendo $p^2 = (p-c+c)^2 = (p-c)^2 + (a+b)c$, e così $p^2 - ab = (p-c)^2 + ac + bc - ab = (p-c)^2 - (ab - ac - bc)$, ovvero $p^2 - ab = (p-c)^2 - m''' = 2(p-c)^2 - m''' - (p-c)^2 = q - (p-c)^2 = 4Rr''' - r'''^2$; viene detta somma $= \frac{4RS.(p-c)}{S.(p-c)r'''}.2(4R - r''')r''' = 8R(4R - r''')$, o cioè $\overline{\mathrm{GG'}}^2 + \overline{\mathrm{GG''}}^2 + \overline{\mathrm{G'G''}}^2 = 8R(4R - r''')$.

Analogamente si troveranno le somme $\overline{\mathrm{GG'}}^2 + \overline{\mathrm{GG'''}}^2 + \overline{\mathrm{G'G'''}}^2 = 8R(4R - r'')$, e $\overline{\mathrm{GG''}}^2 + \overline{\mathrm{GG'''}}^2 + \overline{\mathrm{G''G'''}}^2 = 8R(4R - r')$. Ma

si ha invece la seguente $\overline{G'G''}^2 + \overline{G'G'''}^2 + \overline{G''G'''}^2 = abc . \{ \frac{a}{(p-b)(p-c)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{c}{(p-a)(p-b)} \} = \frac{abcp}{S^2} . L$, dove $L = a(p-a) + b(p-b) + c(p-c) = (a+b+c)p - (a^2+b^2+c^2) = 2p^2 - 2q = 2(p^2 - q)$; e quindi $L = 2(4Rr + r^2) = 2r(4R+r)$; mentre $\frac{abcp}{S^2} = \frac{4RS.p}{S.pr} = \frac{4R}{r}$: perciò si conchiude questa somma $\overline{G'G''}^2 + \overline{G'G'''}^2 + \overline{G''G'''}^2 = 8R(4R+r)$.

Questi risultati vengono del resto a riuscir compresi nei precedenti, dai quali si deducono all'istante, sottraendo una di quelle somme dalla riunione delle altre tre; ovvero sottraendo ciascuna di esse alla volta dalla somma ultima formata dei quadrati di tutte e sei le distanze in questione. Per esempio, sottraedovi la 4.ª, si ottiene la 1.ª delle attuali somme espressa dalla differenza $48R^2 - 8R(2R + r''') = 8R(6R - 2R - r''') = 8R(4R - r''')$; e così le altre analoghe a questa. Invece, sottraendovi la 1.ª di quelle, risulta la 4.ª somma delle presenti, espressa da $48R^2 - 8R(2R - r) = 8R(6R - 2R + r) = 8R(4R + r)$.

Adoperando le formole del n.° 34, si avrebbe quest'ultima somma $\overline{G'G''}^2 + \overline{G'G'''}^2 + \overline{G''G'''}^2 = \frac{abc}{r}(\frac{a}{r'} + \frac{b}{r''} + \frac{c}{r'''}) = 4Rp(\frac{a}{r'} + \frac{b}{r''} + \frac{c}{r'''})$. Ora la quantità $p(\frac{a}{r'} + \frac{b}{r''} + \frac{c}{r'''})$ è quella incontrata in un calcolo del n.° 31, dove si ebbe ad avvertire il suo valore $= 8R + 2r = 2(4R + r)$: perciò si conchiude pure detta somma $= 8R(4R + r)$; come negli altri modi.

37. — Nei precedenti calcoli, si sono ottenute le distanze dei quattro centri G, G', G'', G''', fra di loro a due a due, ed ai vertici del triangolo ABC, espresse così nei soli lati a, b, c di quest'ultimo (n.° 28), come anche nei raggi dei circoli corrispondenti (n.° 30). Ora un'altra questione generale può proporsi, che sarebbe di calcolare del pari le distanze degli stessi centri e degli stessi vertici ad altri punti principali della figura, quali sono il centro O del circolo circoscritto al triangolo, l'incontro V delle sue tre altezze, ed il centro ω del suo circolo medioscritto; come pure le distanze di questi punti fra di loro; ed altre linee ancora, collegate a quelle per intima relazione o dipendenza. Di siffatti calcoli ci andremo ben noi ad occupare progressivamente nel seguito di questa Memoria: frattanto imprendiamo qui a stabilire le formole delle distanze del centro O del circolo circoscritto ai detti centri G, G', G'', G''' dei circoli

inscritto ed escritti; delle quali daremo una nuova dimostrazione assai semplice, indipendente dai calcoli già compiuti.

Immaginando segnata la retta OG, e prolungata fino all' incontro della circonferenza circoscritta nei punti α e ε, dalle parti rispettive di O e di G; si avrebbe il prodotto delle linee $\alpha G . \varepsilon G = (\alpha O + OG)(\varepsilon O + OG)$ $= (R + OG)(R - OG) = R^2 - \overline{OG}^2$. Ma le corde $\alpha\varepsilon$ e AD tagliandosi al punto G, nel circolo di centro O, danno il prodotto $\alpha G . \varepsilon G$ $= AG . DG$: onde questo $AG . DG = R^2 - \overline{OG}^2$, e quindi $\overline{OG}^2 = R^2 - AG . DG$. Ora un tal prodotto $AG . DG = (AD - DG) . DG = AD . (GS + SD) - \overline{DG}^2$ $= AD . GS + AD . SD - \overline{DG}^2$: d'altra parte i triangoli simili ACD e CDS danno la proporzione $CD : AD :: SD : CD$, che dimostra il prodotto $AD . SD = \overline{CD}^2$, mentre già $CD = DG$: perciò rimane semplicemente il primo $AG . DG = AD . GS$. Ma ancora i triangoli rettangoli simili ADD' e GSZ fornendo la proporzione $AD : DD' :: GZ : GS$, ne risulta il prodotto $AD . GS = DD' . GZ = 2R . r$: dunque si conchiude la formola $\overline{OG}^2 = R^2 - 2Rr$, che fornisce l' espressione della distanza OG in funzione dei soli raggi corrispondenti R ed r.

Questa formola dà luogo ad un' osservazione importante. Essendo $\overline{OG}^2 = R(R - 2r)$ una quantità essenzialmente positiva, deve sempre aversi in conseguenza $R > 2r$; ciò che dimostra: che ogni qualvolta uno stesso triangolo ABC sia inscritto in un circolo di raggio R, e ad un tempo circoscritto ad altro circolo di raggio r, deve sempre trovarsi il primo raggio *maggiore* del *doppio* del secondo; e cioè il raggio del circolo circoscritto al triangolo *maggiore* del diametro del circolo inscritto nel medesimo. (Questo risultato si accorda pure col fatto di essere in generale $r < \rho$, raggio del circolo medioscritto, il quale $\rho = \frac{1}{2} R$). Se i circoli vogliansi *concentrici*, allora, per $OG = 0$, deve riuscire $R - 2r = 0$, ossia $r = \frac{1}{2} R$, vale a dire i raggi l'uno *metà* dell' altro; ed il triangolo sarà *equilatero*. Non verificandosi queste condizioni, per due circoli assegnati in un piano, sarebbe impossibile di mai inscrivere nell' uno di essi un triangolo, che riuscisse ad un tempo circoscritto all' altro: ma verificandosi desse invece, il fatto di tale inscrizione troverebbesi allora possibile per una infinità di maniere diverse. È questo un caso particolare di un teorema più generale dovuto a Poncelet, sui poligoni inscritti e circoscritti nello stesso tempo a due sezioni coniche, e di qualunque numero di lati.

Consideriamo il centro G′ di uno dei circoli escritti; ed unito questo ad O, si prolunghi la retta G′O fino a incontrare la circonferenza circoscritta in un punto α, mentre già la interseca in altro punto, che diciamo ϵ: si avrà il prodotto $G'\alpha . G'\epsilon = (G'O + O\alpha)(G'O - O\epsilon) = (OG' + R)(OG' - R) = \overline{OG'}^2 - R^2$, da cui segue $\overline{OG'}^2 = R^2 + G'\alpha . G'\epsilon$. Ma, rispetto al circolo di centro O, le secanti intiere $G'\alpha$ e G′A essendo inversamente proporzionali alle loro parti esterne $G'\epsilon$ e G′D, si ha il prodotto $G'\alpha . G'\epsilon = G'A . G'D$: onde $\overline{OG'}^2 = R^2 + AG' . DG'$. Or trovasi ancora questo prodotto $AG' . DG' = (AD + DG') . DG' = AD . (SG' - SD) + \overline{DG'}^2 = AD . SG' - AD . SD + \overline{DG'}^2 = AD . SG'$, a motivo di $AD . SD = \overline{DC}^2$, e $DG' = DC$: d'altronde i triangoli simili ADD′ e G′SZ′ fornendo la proporzione $AD : DD' :: G'Z' : SG'$, si rileva che $AD . SG' = DD' . G'Z' = 2R . r'$: dunque si conchiude la formola $\overline{OG'}^2 = R^2 + 2Rr'$. In modo analogo, si otterranno le altre $\overline{OG''}^2 = R^2 + 2Rr''$, $\overline{OG'''}^2 = R^2 + 2Rr'''$.

In queste dimostrazioni, giunti alle uguaglianze $\overline{OG}^2 = R^2 - AG . DG$, e $\overline{OG'}^2 = R^2 + AG' . DG'$, avrebbesi potuto procedere diversamente; cercando a comporre i prodotti indicati nei secondi membri, colle espressioni che già si hanno dei loro fattori, date al n.° 28: ma ciò non si è fatto, allo scopo di rendere indipendenti le stesse dimostrazioni da quelli risultati. Del resto, a modo solo di conferma, si sarebbe allora ottenuto immediatamente i valori di $AG . DG = \frac{1}{2} a . \sqrt{\frac{b^2c^2}{p^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4RS}{p} = 2R . r$, e di $AG' . DG' = \frac{1}{2} a . \sqrt{\frac{b^2c^2}{(p-a)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{p-a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4RS}{p-a} = 2R . r'$.

Addizionando le quattro formole dimostrate, si conchiude la somma

$$\overline{OG}^2 + \overline{OG'}^2 + \overline{OG''}^2 + \overline{OG'''}^2 = 4R^2 + 2R(-r + r' + r'' + r''') = 4R^2 + 2R . 4R = 12R^2;$$

che si enuncia:

La somma dei quadrati delle distanze del centro del circolo circoscritto ai quattro centri dei circoli inscritto ed escritti, è uguale a dodici volte il quadrato del raggio del circolo circoscritto.

D′ altronde si ha $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = 3R^2$, essendo $OA = OB = OC = R$ per ipotesi.

38. — Passiamo ora a considerare le tre altezze AL, BM, CN del triangolo ABC; per le quali vengono determinati sopra i suoi lati dei nuovi segmenti, che importa di calcolare, insieme a quelli delle stesse altezze, divise al loro incontro V; prima di procedere a calcoli più complessi di altre linee, che ne dipendono.

Nel triangolo ABC, si hanno le seguenti relazioni fondamentali:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.\mathrm{AM},\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2a.\mathrm{BL},\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a.\mathrm{CL},$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c.\mathrm{AN};\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2c.\mathrm{BN};\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2b.\mathrm{CM};$$

dalle quali si ricavano, in ordine, i valori dei segmenti:

$$\mathrm{AM} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b},\qquad \mathrm{BL} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},\qquad \mathrm{CL} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$
$$\mathrm{AN} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c};\qquad \mathrm{BN} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c};\qquad \mathrm{CM} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}.$$

Ma ponendo la somma dei quadrati $a^2 + b^2 + c^2 = 2q$, riescono le differenze $b^2 + c^2 - a^2 = 2q - 2a^2 = 2(q - a^2)$, $a^2 + c^2 - b^2 = 2q - 2b^2 = 2(q - b^2)$, $a^2 + b^2 - c^2 = 2q - 2c^2 = 2(q - c^2)$: onde si avranno gli stessi segmenti così espressi:

$$\mathrm{AM} = \frac{q-a^2}{b},\ \mathrm{AN} = \frac{q-a^2}{c};\ \mathrm{BL} = \frac{q-b^2}{a},\ \mathrm{BN} = \frac{q-b^2}{c};\ \mathrm{CL} = \frac{q-c^2}{a},\ \mathrm{CM} = \frac{q-c^2}{b}.$$

Se si considerano le parti dei lati comprese fra i piedi delle altezze e i loro punti di mezzo, avrebbersi queste $\mathrm{LH} = \frac{b^2-c^2}{2a}$, $\mathrm{MI} = \frac{a^2-c^2}{2b}$, $\mathrm{NK} = \frac{a^2-b^2}{2c}$; come si possono anche ottenere direttamente. Infatti, osservando, in esempio, che si ha $c^2 - \overline{\mathrm{BL}}^2 = \overline{\mathrm{AL}}^2 = b^2 - \overline{\mathrm{CL}}^2$, ne segue l'equazione $\overline{\mathrm{CL}}^2 - \overline{\mathrm{BL}}^2 = b^2 - c^2$ ovvero $(\mathrm{CL} + \mathrm{BL})(\mathrm{CL} - \mathrm{BL}) = b^2 - c^2$; dalla quale si ricava il valore della differenza $\mathrm{CL} - \mathrm{BL} = \frac{b^2-c^2}{a}$, essendo quello della somma $\mathrm{CL} + \mathrm{BL} = a$. Ma il fatto di $\mathrm{BH} = \mathrm{CH}$ sciogliendosi in questo $\mathrm{BL} + \mathrm{LH} = \mathrm{CL} - \mathrm{LH}$, ne deriva $2\mathrm{LH} = \mathrm{CL} - \mathrm{BL}$; onde si conchiude il valore di $\mathrm{LH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2-c^2}{a} = \frac{b^2-c^2}{2a}$. Frattanto si avrebbero di qui pure i segmenti $\mathrm{CL} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2-c^2}{a} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, e $\mathrm{BL} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2-c^2}{a} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$, come sopra: ed inoltre si possono (n.° 26) avvertire i prodotti $\mathrm{SS}'.\mathrm{LH} = bc$, $\mathrm{TT}'.\mathrm{MI} = ac$, $\mathrm{UU}'.\mathrm{NK} = ab$.

Riguardo alle altezze del triangolo, i loro quadrati vengono immediatamente espressi come segue:

$$\overline{\mathrm{AL}}^2 = b^2 - \frac{(q-c^2)^2}{a^2} = c^2 - \frac{(q-b^2)^2}{a^2};\quad \overline{\mathrm{BM}}^2 = a^2 - \frac{(q-c^2)^2}{b^2} = c^2 - \frac{(q-a^2)^2}{b^2};$$
$$\overline{\mathrm{CN}}^2 = a^2 - \frac{(q-b^2)^2}{c^2} = b^2 - \frac{(q-a^2)^2}{c^2}.$$

Quindi, avendosi il doppio dell'area cioè $2S = a.AL = b.BM = c.CN$, se ne ottiene tosto, elevando al quadrato, e sostituendo, la tripla espressione di

$$4S^2 = a^2b^2 - (q-c^2)^2 = a^2c^2 - (q-b^2)^2 = b^2c^2 - (q-a^2)^2.$$

Rimesso per q il suo valore $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, questa diverrebbe la seguente

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = 4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2;$$

e, sviluppando, si riduce all'unica appresso:

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Intanto da ognuna delle precedenti potrebbesi or dedurre l'espressione di S già ottenuta al n.° 30: avendosi, ad esempio, dalla prima successivamente il valore di

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= \{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2\} = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\ &= 2p.2(p-c).2(p-b).2(p-a) = 16p(p-a)(p-b)(p-c); \end{aligned}$$

da cui si ricava $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Dei sopra detti segmenti dei lati di ABC, determinati dalle altezze, componendo i prodotti a tre a tre *non-consecutivi* sul contorno del triangolo; si trovano qui pure i due prodotti risultanti uguali fra loro; come in altri casi consimili di altri segmenti; avendosi al presente l'espressione di

$$AM.BN.CL = \frac{(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}{abc} = AN.BL.CM;$$

per cui può dirsi:

Il prodotto di tre segmenti alternati è uguale al prodotto degli altri tre.

Si calcolerà appresso il valor comune di questi due prodotti.

39. — Le quantità, o differenze, $q-a^2$, $q-b^2$, $q-c^2$, venendo a entrare di frequente nelle formole che si andranno a dimostrare; credo vantaggioso di avvertire fin d'ora alcuni risultati di loro speciali combinazioni; da valersene all'uopo, secondo le circostanze.

Lo sviluppo dianzi avuto di $16S^2$ trasformasi successivamente come segue:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2a^4 + a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 = 2a^2(b^2+c^2-a^2) \\ &+ a^4 - (b^2-c^2)^2 = 2a^2(b^2+c^2-a^2) + (a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2) \\ &= 2a^2.2(q-a^2) + 2(q-c^2).2(q-b^2). \end{aligned}$$

Dividendo per 4 da ambe le parti, ed estendendo a b, e a c, quanto si appalesa rispetto ad a; conchiudesi la tripla relazione

$$4S^2 = a^2(q-a^2) + (q-b^2)(q-c^2)$$
$$= b^2(q-b^2) + (q-a^2)(q-c^2) = c^2(q-c^2) + (q-a^2)(q-b^2);$$

la quale, unita alla già veduta $4S^2 = b^2c^2 - (q-a^2)^2 = a^2c^2 - (q-b^2)^2$ $= a^2b^2 - (q-c^2)^2$, ci fornirà una trasformazione utile dei prodotti a due a due delle differenze $q-a^2$, $q-b^2$, $q-c^2$, anche ripetute le stesse come fattori.

Inoltre staranno sempre le seguenti identità:

$$q(q-a^2) + (q-b^2)(q-c^2) = b^2c^2,\quad q(q-b^2) + (q-a^2)(q-c^2) = a^2c^2,$$
$$q(q-c^2) + (q-a^2)(q-b^2) = a^2b^2;$$

che si accordano bene colle precedenti. Poichè avendosi, ad esempio, dalle une e dalle altre lo stesso prodotto

$$(q-b^2)(q-c^2) = b^2c^2 - q(q-a^2) = 4S^2 - a^2(q-a^2),$$

si riconosce pur vera la nuova relazione che ne risulta; la quale rinviene subito a questa $b^2c^2 - 4S^2 = q(q-a^2) - a^2(q-a^2) = (q-a^2)(q-a^2)$ $= (q-a^2)^2$, come è di fatto.

L'espressione di $4S^2$, o vogliam dire di S^2, può anche esser messa sotto altre forme. Se si avverte che $a^2 = 2q - b^2 - c^2 = (q-b^2) + (q-c^2)$, per cui il prodotto $a^2(q-a^2) = (q-b^2)(q-a^2) + (q-c^2)(q-a^2)$; si potrà così scrivere la formola

$$4S^2 = (q-a^2)(q-b^2) + (q-a^2)(q-c^2) + (q-b^2)(q-c^2).$$

Se quindi si addizionano insieme le tre prime del presente numero, avendo mente a quest'ultima, si ottiene la somma $12S^2 = a^2(q-a^2) + b^2(q-b^2) + c^2(q-c^2) + 4S^2$; dalla quale si ricava pure la seguente

$$8S^2 = a^2(q-a^2) + b^2(q-b^2) + c^2(q-c^2).$$

Sviluppando questa, si trova: $8S^2 = (a^2+b^2+c^2)q - a^4 - b^4 - c^4$, ossia $8S^2 = 2q^2 - a^4 - b^4 - c^4$; che darebbe la somma $a^4 + b^4 + c^4 = 2q^2 - 8S^2$: ma sottraendola invece dall'espressione di $16S^2$ del n.° 38, viene ancora $16S^2 - 8S^2$ cioè $8S^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2q^2$; donde segue $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 8S^2 + 2q^2$, ovvero la somma dei prodotti $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 4S^2 + q^2$. Più direttamente avrebbesi questa somma dallo sviluppo dell'altra espressione di $4S^2$ dianzi avvertita; la quale divenendo

$4S^2 = 3q^2 - 2q(a^2+b^2+c^2) + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = -q^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, fornisce subito la somma $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 4S^2 + q^2$.

Del resto tutte queste relazioni sono pure conseguenze immediate dei seguenti due sviluppi di $4q^2=(a^2+b^2+c^2)^2=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+a^4+b^4+c^4$, e di $16S^2=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$; i quali, sommati, e sottratti, danno separatamente la somma $4q^2+16S^2=4a^2b^2+4a^2c^2+4b^2c^2$, e la differenza $4q^2-16S^2=2a^4+2b^4+2c^4$; onde seguono al momento i valori di $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=q^2+4S^2$, e di $a^4+b^4+c^4=2q^2-8S^2$.

Per dare un'applicazione delle precedenti formole, specialmente delle prime registrate in questo numero, calcolerò qui ora il prodotto, già incontrato di sopra, di tutte e tre le dette differenze $q-a^2$, $q-b^2$, $q-c^2$; il quale prodotto si presenta pure di frequente in diverse altre circostanze; per il chè io lo designerò da qui innanzi semplicemente con una lettera k. Senza svilupparlo, si trova desso trasformato successivamente come segue:

$$k=(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)=(q-a^2)\{4S^2-a^2(q-a^2)\}$$
$$=4S^2(q-a^2)-a^2(q-a^2)^2=4S^2(q-a^2)-a^2(b^2c^2-4S^2)=4S^2(q-a^2)$$
$$-a^2b^2c^2+a^2.\,4S^2=4S^2(q-a^2+a^2)-a^2b^2c^2=4qS^2-a^2b^2c^2.$$

Ma $a^2b^2c^2=16R^2S^2=4S^2.\,4R^2$: dunque ancora $k=4S^2(q-4R^2)$. Quindi sarà ciascun prodotto, considerato nel numero precedente,

$$\text{AM.BN.CL}=\text{AN.BL.CM}=\frac{k}{abc}=\frac{4S^2(q-4R^2)}{4RS}=\frac{S}{R}\cdot(q-4R^2).$$

Frattanto avendosi, dal calcolo fatto, il valore di $S^2=\frac{1}{4q}(k+a^2b^2c^2)$ $=\frac{1}{4q^2}(qk+qa^2b^2c^2)$, si conchiude pure la nuova formola

$$S=\frac{1}{2q}\cdot\sqrt{q(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)+qa^2b^2c^2};$$

ovvero ancora la seguente

$$S=\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{q-4R^2}}=\frac{\sqrt{(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}}{2\sqrt{q-4R^2}}=\frac{1}{2\sqrt{q}\,.\sqrt{q-4R^2}}\cdot\sqrt{q(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}.$$

40. — Calcoliamo i segmenti delle altezze. I triangoli rettangoli simili ABL ed AVN dando le proporzioni AB : AL : BL : : AV : AN : VN, si ricavano di qui i valori di $\text{AV}=\frac{\text{AB.AN}}{\text{AL}}$, e $\text{VN}=\frac{\text{BL.AN}}{\text{AL}}$, che divengono tosto $\text{AV}=\frac{a(q-a^2)}{2S}$, $\text{VN}=\frac{(q-a^2)(q-b^2)}{2cS}$. Estendendo queste espressioni agli altri segmenti, i cui valori del resto si otterrebbero direttamente per le altre coppie analoghe di triangoli rettangoli simili, si conchiudono le formole:

$$\text{AV}=\frac{a(q-a^2)}{2S},\qquad \text{BV}=\frac{b(q-b^2)}{2S},\qquad \text{CV}=\frac{c(q-c^2)}{2S};$$
$$\text{LV}=\frac{(q-b^2)(q-c^2)}{2aS},\qquad \text{MV}=\frac{(q-a^2)(q-c^2)}{2bS},\qquad \text{NV}=\frac{(q-a^2)(q-b^2)}{2cS}.$$

Quindi saranno pure le distanze
$\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\mathrm{AV}=\frac{a(q-a^2)}{4S}$, $\mathrm{OI}=\frac{1}{2}\mathrm{BV}=\frac{b(q-b^2)}{4S}$, $\mathrm{OK}=\frac{1}{2}\mathrm{CV}=\frac{c(q-c^2)}{4S}$:
ma potrebbero aversi queste direttamente, per altri triangoli della figura. Infatti, paragonando i due OBH ed ABM, rettangoli in H, e in M, si riconosce esser simili, atteso l'angolo $\mathrm{BOH}=\mathrm{BAM}=\mathrm{A}$, come aventi la stessa misura BD, metà dell' arco BDC: perciò la proporzione OH : BH :: AM : BM, che determina $\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{BH}\,.\,\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}=\frac{a(q-a^2)}{4S}$. Allo stesso modo si otterrebbero OI, ed OK: ed allora, dal confronto, si conchiuderebbero le relazioni $\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\mathrm{AV}$, $\mathrm{OI}=\frac{1}{2}\mathrm{BV}$, $\mathrm{OK}=\frac{1}{2}\mathrm{CV}$; quando ciò non si fosse ancora dimostrato per altri modi; siccome invece lo fu ai n.[i] 8 e 10.

Cognite OH, OI, OK, ne seguiranno le distanze $\mathrm{DH}=R-\mathrm{OH}$, $\mathrm{EI}=R-\mathrm{OI}$, $\mathrm{FK}=R-\mathrm{OK}$. La prima diviene successivamente:

$$\mathrm{DH}=\frac{abc}{4S}-\frac{a(q-a^2)}{4S}=\frac{a}{8S}\cdot\{2bc-2(q-a^2)\}=\frac{a}{8S}\cdot\{2bc-b^2-c^2+a^2\}$$
$$=\frac{a}{8S}\cdot\{a^2-(b-c)^2\}=\frac{a}{8S}\cdot\{(a+b-c)(a-b+c)\}=\frac{a}{8S}\cdot 2(p-c).2(p-b)$$
$$=\frac{a\,S.(p-b)(p-c)}{2.p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{aS}{2p(p-a)};$$

come si otterrebbe più presto, osservando che $\overline{\mathrm{CD}}^2=\mathrm{DD'}.\mathrm{DH}=2R.\mathrm{DH}$, mentre di già $\overline{\mathrm{CD}}^2=\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{bc}{p(p-a)}$; onde segue al momento il valore di $\mathrm{DH}=\frac{a^2bc}{4p(p-a).2R}=\frac{a.4RS}{2.4R.p(p-a)}=\frac{aS}{2p(p-a)}$. Analogamente saranno $\mathrm{EI}=\frac{bS}{2p(p-b)}$, ed $\mathrm{FK}=\frac{cS}{2p(p-c)}$: e se si considerino invece le distanze $\mathrm{D'H}=R+\mathrm{OH}$, $\mathrm{E'I}=R+\mathrm{OI}$, $\mathrm{F'K}=R+\mathrm{OK}$, troverebbersi pur queste $\mathrm{D'H}=\frac{aS}{2(p-b)(p-c)}$, $\mathrm{E'I}=\frac{bS}{2(p-a)(p-c)}$, $\mathrm{F'K}=\frac{cS}{2(p-a)(p-b)}$. Per verificazione, si osservi che risultano i prodotti $\mathrm{DH}.\mathrm{D'H}=\frac{a^2}{4}$, $\mathrm{EI}.\mathrm{E'I}=\frac{b^2}{4}$, $\mathrm{FK}.\mathrm{F'K}=\frac{c^2}{4}$, come è manifesto in figura.

Formando il quadrato di AV, si ottiene desso così trasformato $\overline{\mathrm{AV}}^2=\frac{a^2(q-a^2)^2}{4S^2}=\frac{a^2(b^2c^2-4S^2)}{4S^2}=\frac{a^2b^2c^2}{4S^2}-a^2=4R^2-a^2$: e diffatti sarebbe $\overline{\mathrm{OH}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2=R^2-\frac{1}{4}a^2$, onde $\overline{\mathrm{AV}}^2=(2\mathrm{OH})^2=4.\overline{\mathrm{OH}}^2=4R^2-a^2$. Inoltre, se si segnasse il triangolo A'B'C', di cui si è parlato al n.° 8, rispetto al quale sarebbe V il centro del circolo circoscritto, di raggio $2R$; si avrebbe, anche più direttamente, l'espressione di $\overline{\mathrm{AV}}^2=\overline{\mathrm{VB'}}^2-\overline{\mathrm{AB'}}^2=4R^2-a^2$; come del pari $\overline{\mathrm{BV}}^2=4R^2-b^2$, $\overline{\mathrm{CV}}^2=4R^2-c^2$. Quindi risulta la somma $\overline{\mathrm{AV}}^2+\overline{\mathrm{BV}}^2+\overline{\mathrm{CV}}^2=12R^2-2q$.

Potrebbero farsi i quadrati di LV, MV, NV; ma non presenterebbero interesse, nè semplicità di risultati: piuttosto meritano di essere avvertiti i prodotti di questi tre segmenti, e dei tre primi; che divengono successivamente espressi come segue:

$$\mathrm{AV}.\mathrm{BV}.\mathrm{CV}=\frac{abc(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}{8S^3}=\frac{4RS.4S^2(q-4R^2)}{8S^3}=2R.(q-4R^2);$$

$$\mathrm{LV}.\mathrm{MV}.\mathrm{NV}=\frac{(q-a^2)^2(q-b^2)^2(q-c^2)^2}{8abcS^3}=\frac{16S^4(q-4R^2)^2}{8.4RS.S^3}=\frac{1}{2R}\cdot(q-4R^2)^2:$$

e se ne avrebbe il rapporto $\frac{(\mathrm{AV}.\mathrm{BV}.\mathrm{CV})^2}{\mathrm{LV}.\mathrm{MV}.\mathrm{NV}}=8R^3=(2R)^3$.

41. — Siamo ora in grado di calcolare le distanze del nuovo punto V ai centri di già considerati O, G, G′, ecc.; dalle quali cognite seguiranno poi prontamente quelle relative al centro ω del circolo medioscritto, come si vedrà a suo luogo.

Segnato il raggio OA, si immagini condotta una retta Oγ, parallela a BC, fino all'incontro di AL in γ: si avrà in figura un triangolo AOV, nel quale conoscendo i lati AO ed AV, ed il segmento $\mathrm{A}\gamma=\mathrm{AL}-\mathrm{OH}$, sul lato AV, adiacente all'angolo OAV, cui si trova opposto il terzo lato incognito OV; sarà però questo determinato dalla relazione $\overline{\mathrm{OV}}^2=\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\mathrm{AV}}^2-2\mathrm{AV}.\mathrm{A}\gamma$; la quale diviene successivamente

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OV}}^2&=R^2+4R^2-a^2-\frac{a(q-a^2)}{S}.\left(\frac{2S}{a}-\frac{a(q-a^2)}{4S}\right)\\&=5R^2-a^2-2(q-a^2)+\frac{a^2(q-a^2)^2}{4S^2},\end{aligned}$$

ovvero, poichè $\frac{a^2(q-a^2)^2}{4S^2}=\overline{\mathrm{AV}}^2=4R^2-a^2$, questa:

$$\overline{\mathrm{OV}}^2=5R^2-a^2-2q+2a^2+4R^2-a^2=9R^2-2q.$$

Quindi, essendo ω alla metà di OV, o cioè le distanze $\mathrm{O}\omega=\mathrm{V}\omega=\frac{1}{2}\mathrm{OV}$, si avrà a un tempo la formola $\overline{\mathrm{O}\omega}^2=\overline{\mathrm{V}\omega}^2=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{OV}}^2=\frac{1}{4}(9R^2-2q)$, ossia $\overline{\mathrm{O}\omega}^2=\overline{\mathrm{V}\omega}^2=\frac{9}{4}R^2-\frac{1}{2}q$.

Atteso le relazioni, altrove dimostrate, $\overline{\mathrm{AV}}^2+\overline{\mathrm{BV}}^2+\overline{\mathrm{CV}}^2=12R^2-2q$, ed $\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\mathrm{BO}}^2+\overline{\mathrm{CO}}^2=3R^2$; si può qui avvertire che si avrebbe la seguente $\left(\overline{\mathrm{AV}}^2+\overline{\mathrm{BV}}^2+\overline{\mathrm{CV}}^2\right)-\left(\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\mathrm{BO}}^2+\overline{\mathrm{CO}}^2\right)=\overline{\mathrm{VO}}^2$.

L'espressione di $\overline{\mathrm{OV}}^2$, testè ottenuta, non è quella sotto cui si presenta da altri autori; ma vi si riduce pure al momento, elimi-

nando da essa la quantità q, della quale io faccio uso, per la relazione $q = p^2 - 4Rr - r^2$, stabilita al n.° 33: ne risulta così allora l'espressione, meno semplice, di $\overline{OV}^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2$; ad un tempo che quella di $\overline{O\omega}^2 = \overline{V\omega}^2 = \frac{9}{4}R^2 + 2Rr + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}p^2$.

42. — Con metodo analogo al precedente, si troveranno i valori delle distanze VG, VG', ecc., come appresso.

Segnata VG, si conduca dal punto G una parallela Gn a BC, fino all'incontro in n con AL: si avrà qui un triangolo AGV, nel quale essendo cogniti i lati AG, AV, e il segmento $An = AL - GZ$, adiacente all'angolo GAV, cui è opposto il terzo lato GV, risulterà quest'ultimo determinato per la relazione $\overline{VG}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AV}^2 - 2AV.An$, la quale diviene da prima:

$$\overline{VG}^2 = \frac{bc(p-a)}{p} + 4R^2 - a^2 - \frac{a(q-a^2)}{S}\cdot\left(\frac{2S}{a} - \frac{S}{p}\right)$$
$$= \frac{bc(p-a)}{p} + 4R^2 - a^2 - 2(q-a^2) + \frac{a(q-a^2)}{p}.$$

Ma avendosi $\frac{bc(p-a)}{p} = bc - \frac{abc}{p} = bc - \frac{4Rpr}{p} = bc - 4Rr$; ed, a motivo di $q - a^2 = 2p^2 - m - a^2 = 2p^2 - ab - ac - bc - a^2 = 2p^2 - a(b+c+a) - bc = 2p^2 - 2ap - bc$, riuscendo $\frac{a(q-a^2)}{p} = 2pa - 2a^2 - \frac{abc}{p} = 2pa - 2a^2 - 4Rr$; si ottiene la somma i questi due termini

$$\frac{bc(p-a)}{p} + \frac{a(q-a^2)}{p} = bc - 4Rr + (a+b+c)a - 2a^2 - 4Rr.$$
$$= bc - 8Rr + a^2 + ab + ac - 2a^2 = m - 8Rr - a^2 = 2p^2 - q - 8Rr - a^2$$
$$= 2q + 8Rr + 2r^2 - q - 8Rr - a^2 = q + 2r^2 - a^2;$$

onde viene l'espressione di

$$\overline{VG}^2 = q + 2r^2 - a^2 + 4R^2 - a^2 - 2q + 2a^2 = 4R^2 + 2r^2 - q;$$

od ancora, pel valore di q in p^2, questa $\overline{VG}^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$.

Parimente, dal punto G' conducendo $G'n'$ parallela a BC, fino all'incontro in n' di AL prolungata, con che si determina il segmento $An' = AL + G'Z'$; si avrà, nel triangolo AG'V, la relazione $\overline{VG'}^2 = \overline{AG'}^2 + \overline{AV}^2 - 2AV.An'$, che diviene:

$$\overline{VG'}^2 = \frac{bcp}{p-a} + 4R^2 - a^2 - \frac{a(q-a^2)}{S}\cdot\left(\frac{2S}{a} + \frac{S}{p-a}\right)$$
$$= \frac{bcp}{p-a} + 4R^2 - a^2 - 2(q-a^2) - \frac{a(q-a^2)}{p-a}.$$

Ora il termine $\frac{bcp}{p-a} = \frac{bc(p-a+a)}{p-a} = bc + \frac{abc}{p-a} = bc + \frac{4R.(p-a)r'}{p-a}$ $= bc + 4Rr'$: d'altronde, a motivo di $q - a^2 = 2(p-a)^2 - m' - a^2 =$ $2(p-a)^2 + ab + ac - bc - a^2 = 2(p-a)^2 + a(b+c-a) - bc$ $= 2(p-a)^2 + 2a(p-a) - bc$, divenendo l' altro termine $\frac{a(q-a^2)}{p-a} = 2a(p-a) + 2a^2 - \frac{abc}{p-a} = 2a(p-a) + 2a^2 - 4Rr'$; si ottiene la differenza di questi due termini

$$\frac{bcp}{p-a} - \frac{a(q-a^2)}{p-a} = bc + 4Rr' - a(b+c-a) - 2a^2 + 4Rr' =$$
$$bc + 8Rr' - ab - ac + a^2 - 2a^2 = m' + 8Rr' - a^2 = 2(p-a)^2 - q$$
$$+ 8Rr' - a^2 = 2q - 8Rr' + 2r'^2 - q + 8Rr' - a^2 = q + 2r'^2 - a^2;$$

onde, sostituendo, risulta l'espressione di

$$\overline{VG'}^2 = q + 2r'^2 - a^2 + 4R^2 - a^2 - 2q + 2a^2 = 4R^2 + 2r'^2 - q;$$

od ancora $VG'^2 = 4R^2 - 4Rr' + 3r'^2 - (p-a)^2$, pel valore di q in $(p-a)^2$.

In modo analogo si dedurranno le espressioni di $\overline{VG''}^2$, e $\overline{VG'''}^2$, che seguiranno pur da questa di $\overline{VG'}^2$, cangiando r' in r'', in r''', ad un tempo che a in b, in c.

Addizionando le quattro formole ottenute, viene la somma

$$\overline{VG}^2 + \overline{VG'}^2 + \overline{VG''}^2 + \overline{VG'''}^2$$
$$= 16R^2 + 2(r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2) - 4q = 16R^2 + 32R^2 - 4q - 4q$$
$$= 48R^2 - 8q = 8(6R^2 - q) = 4\left(\overline{VO}^2 + 3R^2\right) = 4\left(\overline{VA}^2 + \overline{VB}^2 + \overline{VC}^2\right).$$

43. — Per dedurre adesso le distanze del centro ω del circolo medioscritto ai quattro centri G, G′, G″, G‴ dei circoli inscritto ed escritti; già conoscendosi quelle di ω ai punti O e V; si osservi che, essendo ω situato alla metà di OV, avrebbesi sempre in figura un triangolo GOV, o G′OV, ecc., di cui sono cogniti ormai tutti i tre lati, e nel quale la distanza cercata Gω, o G′ω, ecc. sarebbe la *mediana* del lato OV, partita dal vertice opposto G, o G′, ecc.: onde, per un noto teorema di Geometria elementare, si avranno al momento, in tali triangoli, le seguenti relazioni:

$$\overline{GO}^2 + \overline{GV}^2 = 2\overline{G\omega}^2 + 2\overline{O\omega}^2, \quad \overline{G'O}^2 + \overline{G'V}^2 = 2\overline{G'\omega}^2 + 2\overline{O\omega}^2, \text{ ecc.}$$

Rimpiazzando i lati per le loro espressioni, si ricava da queste rispettivamente:

$$\overline{G\omega}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{GO}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{GV}^2 - \overline{O\omega}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}R^2 - Rr + 2R^2 + r^2 - \tfrac{1}{2}q - \tfrac{9}{4}R^2 + \tfrac{1}{2}q = \tfrac{1}{4}R^2 - Rr + r^2;$$

$$\overline{G'\omega}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{G'O}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{G'V}^2 - \overline{O\omega}^2$$

$$= \tfrac{1}{2}R^2 + Rr' + 2R^2 + r'^2 - \tfrac{1}{2}q - \tfrac{9}{4}R^2 + \tfrac{1}{2}q = \tfrac{1}{4}R^2 + Rr' + r'^2;$$

ovvero $\overline{G\omega}^2 = (\frac{1}{2}R - r)^2 = (\rho - r)^2$, $\overline{G'\omega}^2 = (\frac{1}{2}R + r')^2 = (\rho + r')^2$; ed in conseguenza $G\omega = \rho - r$, $G'\omega = \rho + r'$; come del pari sarebbe $G''\omega = \rho + r''$, $G'''\omega = \rho + r'''$. Questi risultati ci dimostrano adunque che il circolo medioscritto del triangolo ABC riuscirà a un tempo tangente a ciascuno dei quattro circoli inscritto ed escritti del medesimo; dappoichè le distanze del suo centro ai centri di questi ultimi sono uguali alla *differenza*, ed alle *somme* dei raggi corrispondenti.

Una circostanza ben rimarchevole si viene a scoprire per i detti valori di $G\omega$, $G'\omega$, ecc. Essendo $\overline{OG}^2 = 2R(\frac{1}{2}R - r) = 2R(\rho - r) = 2R \,.\, G\omega$; $\overline{OG'}^2 = 2R(\frac{1}{2}R + r') = 2R(\rho + r') = 2R.G'\omega$; come anche $\overline{OG''}^2 = 2R.G''\omega$, $\overline{OG'''}^2 = 2R.G'''\omega$; le quali si sciolgono nelle proporzioni $2R : OG :: OG : G\omega$, $2R : OG' :: OG' : G'\omega$, ecc.; si appalesa così questo teorema:

La distanza del centro del circolo circoscritto ad ogni centro di circolo inscritto od escritto è sempre media proporzionale fra il diametro del circolo circoscritto e la distanza dello stesso centro di circolo inscritto od escritto al centro del circolo medioscritto.

In altri termini:

La distanza d'ogni centro di circolo inscritto od escritto al centro del circolo medioscritto è sempre terza proporzionale al diametro del circolo circoscritto ed alla distanza del suo centro da quello di detto circolo inscritto od escritto.

Un'altra osservazione può farsi a proposito di siffatti risultati.

Se, unitamente al triangolo primitivo ABC, si considerino i tre nuovi triangoli BCV, ACV, ABV; per questi rimanendo fissamente lo stesso il triangolo LMN dei piedi delle altezze corrispondenti (n.° 19), e così lo stesso il circolo medioscritto, che a ciascuno si rapporta; la proprietà testè dimostrata, della tangenza di quest'ul-

timo coi quattro circoli inscritto ed escritti di ABC (proprietà vera d'altronde, qualunque sia la forma di ABC medesimo, abbenchè solo considerato di preferenza il caso di ABC *acutangolo*), dovrà estendersi egualmente e verificarsi per rispetto ad ogni gruppo dei quattro circoli inscritti ed escritti ai detti triangoli BCV, ACV, ABV; donde si conchiude questo teorema generale:

Il circolo medioscritto di un triangolo è tangente ad un tempo ai sedici circoli inscritti ed escritti dei quattro triangoli (compreso il dato) formati dai suoi vertici e l'incontro delle altezze.

La figura ABCV è ciò che si chiama dai moderni geometri un *tetragono completo ortogonale*; il quale si riguarda come composto dei *sei* lati AB, AC, BC, AV, BV, CV, con *quattro* vertici A, B, C, V; e dove i punti L, M, N si dicono le *intersezioni* o i *punti di concorso* delle *coppie di lati opposti* AV e BC, BV e AC, CV e AB, attualmente *ortogonali* ossia *perpendicolari* fra loro: quindi, convenendo di chiamare tuttavia col nome di *circolo medioscritto* del *tetragono completo ortogonale* ABCV quello che passa per questi punti di concorso de' suoi lati opposti, si potranno enunciare le proprietà dimostrate sul medesimo come segue:

Il circolo medioscritto di ogni tetragono completo ortogonale passa per i punti di mezzo di tutti i suoi lati, ed è tangente ai sedici circoli inscritti ed escritti dei quattro triangoli determinati dai vertici del tetragono presi a tre a tre.

44. — Con metodo analogo a quello praticato nel precedente numero, potranno ottenersi le distanze del centro ω ai vertici A, B, C del triangolo proposto; riuscendo pure ognuna di queste, come $A\omega$, la mediana di un triangolo, siccome AOV, di cui si conoscono i tre lati. Ad esempio, in questo detto AOV, la relazione $\overline{AO}^2 + \overline{AV}^2 = 2\overline{A\omega}^2 + 2\overline{O\omega}^2$ somministrerebbe tosto il valore di $\overline{A\omega}^2 = \frac{1}{2}\overline{AO}^2 + \frac{1}{2}\overline{AV}^2 - \overline{O\omega}^2$, che diviene:

$$\overline{A\omega}^2 = \frac{1}{2}R^2 + 2R^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{4}R^2 + \frac{1}{2}q = \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{2}(q - a^2)$$
$$= \rho^2 + \frac{1}{2}(q - a^2):$$

e parimente si avrebbero quelli di $\overline{B\omega}^2 = \rho^2 + \frac{1}{2}(q - b^2)$, e di $\overline{C\omega}^2 = \rho^2 + \frac{1}{2}(q - c^2)$. Di qui segue la somma

$$\overline{A\omega}^2 + \overline{B\omega}^2 + \overline{C\omega}^2 = 3\rho^2 + \frac{1}{2}(3q - 2q) = 3\rho^2 + \frac{1}{2}q.$$

Ma in altro modo si può pervenire a queste medesime espressioni delle distanze $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$.

Se si immagina dal punto A condotta una tangente $A\theta$ al circolo medioscritto, e segnato il raggio $\omega\theta$; sarebbe la distanza $A\omega$ l'ipotenusa di un triangolo rettangolo $A\omega\theta$, nel quale si avrà perciò $\overline{A\omega}^2 = \overline{A\theta}^2 + \overline{\omega\theta}^2 = \overline{A\theta}^2 + \rho^2$. Or paragonando la tangente $A\theta$ alla secante AI, per esempio, che taglia il circolo medioscritto in M, viene il suo quadrato $\overline{A\theta}^2 = AI \,.\, AM = \frac{1}{2} b \cdot \frac{q-a^2}{b} = \frac{1}{2}(q-a^2)$: dunque si conchiude $\overline{A\omega}^2 = \rho^2 + \frac{1}{2}(q-a^2)$; e così delle altre.

Dimostrate *direttamente* in tal guisa queste espressioni di $A\omega$, $B\omega$, $C\omega$, si potrebbe poi valere di esse nel calcolo delle altre linee della figura, per esempio in quello principale della $OV = 2O\omega$, che si ricaverebbe dalla relazione già sopra scritta $\overline{AO}^2 + \overline{AV}^2 = 2\overline{A\omega}^2 + 2\overline{O\omega}^2$, la quale dà al momento il valore di

$$\overline{OV}^2 = 4\overline{O\omega}^2 = 2\overline{AO}^2 + 2\overline{AV}^2 - 4\overline{A\omega}^2$$
$$= 2R^2 + 8R^2 - 2a^2 - R^2 - 2q + 2a^2 = 9R^2 - 2q,$$

come si è trovato al n.° 41.

45. — Il circolo medioscritto del triangolo ABC, qui innanzi considerato, essendo la stessa cosa che il circolo circoscritto al triangolo LMN dei piedi delle altezze di ABC; si è veduto al n.° 11 come, rispetto a questo, i punti V, A, B, C siano insieme i centri dei suoi circoli inscritto ed escritti corrispondenti; onde fra essi e il centro ω dovranno passare le stesse o analoghe relazioni osservate fra il centro O ed i centri G, G', G'', G'''. Si è ciò quanto si potrà pure facilmente confermare; dopo cogniti i raggi dei nuovi circoli di centri V, A, B, C, che andiamo a dedurre; distinguendoli in ordine colle lettere τ, τ', τ'', τ'''.

Dal punto V abbassando una perpendicolare Vt sopra MN, si forma un triangolo rettangolo VtN simile al triangolo ALC, dappoichè l'angolo $VNt = compl\, C = LAC$; onde la proporzione $Vt : VN :: LC : AC$ determinerà il raggio $\tau = Vt = \frac{VN \,.\, LC}{AC}$, che risulta $\tau = \frac{(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}{2abcS}$ $= \frac{4S^2(q-4R^2)}{8RS^2}$, ossia $\tau = \frac{q-4R^2}{2R}$.

Abbassando da A sopra MN la perpendicolare At', il nuovo triangolo ANt', comparato allo stesso ALC suo simile, darà parimente la

proporzione At′:AN::AL:AC, che fornirà il valore del raggio $\tau' = \mathrm{A}t' = \frac{\mathrm{AN.AL}}{\mathrm{AC}} = \frac{2S(q-a^2)}{abc} = \frac{2S(q-a^2)}{4RS}$, ossia $\tau' = \frac{q-a^2}{2R}$: ed in modo analogo si avranno i raggi $\tau'' = \frac{q-b^2}{2R}$, $\tau''' = \frac{q-c^2}{2R}$.

Fra questi raggi si trova all' istante verificata la relazione $-\tau + \tau' + \tau'' + \tau''' = 4\rho$, che deve aver luogo, giusta il risultato del n.° 31; poichè riesce tal somma $= \frac{1}{2R}(-q + 4R^2 + 3q - 2q) = \frac{4R^2}{2R} = 2R = 4\rho$: ma frattanto, valendosi al presente delle relazioni consimili dimostrate al n.° 30, potremo dedurre per esse gli elementi principali del triangolo LMN; come è fatto qui appresso.

46. — Primieramente, riuscendo il prodotto $\tau'\tau''\tau''' = \frac{k}{8R^3} = \frac{S^2(q-4R^2)}{2R^3}$, e quindi il rapporto $\frac{\tau'\tau''\tau'''}{\tau} = \frac{S^2}{R^2}$; ed equivalendo, pel n.° 30, questo rapporto a π^2, detto π il semiperimetro $\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$ del triangolo LMN; si ha così $\pi^2 = \frac{S^2}{R^2}$, da cui segue $\pi = \frac{S}{R}$, e $2\pi = \frac{S}{\frac{1}{2}R} = \frac{S}{\rho}$; onde si dirà:

Il perimetro del triangolo LMN, *dei piedi delle altezze di* ABC, *è uguale al quoziente dell' area di quest' ultimo divisa pel raggio del suo circolo medioscritto.*

Questo risultato si accorda con quello ottenuto verso il fine del n.° 35, avvertito che ivi si avrebbe $2p = \frac{G'G''G'''}{R}$.

In secondo luogo, avendosi il prodotto di tutti i quattro raggi $\tau\tau'\tau''\tau''' = \frac{S^2(q-4R^2)^2}{4R^4} = \Sigma^2$, dicendo Σ l' area di LMN; si conchiude il valore di questa $\Sigma = \frac{S(q-4R^2)}{2R^2}$. Quindi, per le relazioni $\Sigma = \pi\tau = (\pi-\lambda)\tau' = (\pi-\mu)\tau'' = (\pi-\nu)\tau'''$, se ne dedurrebbero i valori dei segmenti $\pi = \frac{S}{R}$, $\pi - \lambda = \frac{S}{R}\cdot\frac{q-4R^2}{q-a^2}$, $\pi - \mu = \frac{S}{R}\cdot\frac{q-4R^2}{q-b^2}$, $\pi - \nu = \frac{S}{R}\cdot\frac{q-4R^2}{q-c^2}$; e per seguito quelli dei lati $\lambda = \frac{S}{R}\cdot\frac{4R^2-a^2}{q-a^2}$, $\mu = \frac{S}{R}\cdot\frac{4R^2-b^2}{q-b^2}$, $\nu = \frac{S}{R}\cdot\frac{4R^2-c^2}{q-c^2}$: ma queste espressioni potranno ancora di molto semplificarsi. Infatti, essendo $4R^2 - a^2 = \overline{\mathrm{AV}}^2 = \frac{a^2(q-a^2)^2}{4S^2}$, viene così $\lambda = \frac{a^2(q-a^2)}{4RS} = \frac{a^2(q-a^2)}{abc}$, ossia $\lambda = \frac{a(q-a^2)}{bc}$; e parimente $\mu = \frac{b(q-b^2)}{ac}$, $\nu = \frac{c(q-c^2)}{ab}$. Allo stesso modo, scrivendosi $\pi - \lambda = \frac{4S^2(q-4R^2)}{4RS.(q-a^2)} = \frac{(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}{abc.(q-a^2)}$, si otterrà semplificato $\pi - \lambda = \frac{(q-b^2)(q-c^2)}{abc}$; come ancora $\pi - \mu = \frac{(q-a^2)(q-c^2)}{abc}$, $\pi - \nu = \frac{(q-a^2)(q-b^2)}{abc}$; mentre sarebbe $\pi = \frac{4S^2}{abc}$.

47. — Dai raggi τ, τ', τ'', τ''', prima ottenuti per la figura, essendosi dedotti testè i valori dei lati λ, μ, ν, e loro segmenti relativi; reciprocamente si potranno derivare quelli da questi, che invece si determinino in via diretta; siccome può farsi con eguale agevolezza.

Da prima avvertiamo, che gli stessi triangoli simili VtN, At'N, ed ALC, considerati nel n.° 45, darebbero ancora le proporzioni VN : Nt :: AC : AL, AN : Nt' :: AC : LC; dalle quali si ricavano i valori dei segmenti $\pi - \nu = \mathrm{Nt} = \frac{\mathrm{VN.AL}}{\mathrm{AC}} = \frac{(q-a^2)(q-b^2)}{abc}$, $\pi - \mu = \mathrm{Mt} = \mathrm{Nt'} = \frac{\mathrm{AN.LC}}{\mathrm{AC}} = \frac{(q-a^2)(q-c^2)}{abc}$; e del pari si avrebbe $\pi - \lambda = \frac{(q-b^2)(q-c^2)}{abc}$. Quindi, per la loro somma (n. 39), si ottiene $\pi = \frac{4S^2}{abc} = \frac{4S^2}{4RS} = \frac{S}{R}$.

I triangoli AMN ed ABC essendo simili (n.° 14), danno la proporzione AM : MN :: AB : BC, da cui segue $\lambda = \mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AM.BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{a(q-a^2)}{bc}$: e analogamente si troverebbero $\mu = \frac{b(q-b^2)}{ac}$, $\nu = \frac{c(q-c^2)}{ab}$. Quindi la somma $\lambda + \mu + \nu = 2\pi = \frac{a^2(q-a^2)+b^2(q-b^2)+c^2(q-c^2)}{abc} = \frac{8S^2}{4RS} = \frac{2S}{R}$, e la semisomma $\pi = \frac{S}{R}$. Parimente si ottiene la superficie $\Sigma = \sqrt{\pi(\pi-\lambda)(\pi-\mu)(\pi-\nu)} = \sqrt{\frac{4S^4.(q-a^2)^2(q-b^2)^2(q-c^2)^2}{a^4b^4c^4}} = \frac{2S.(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}{a^2b^2c^2}$, ovvero $\Sigma = \frac{2S.4S^2-(q4R^2)}{16R^2S^2} = \frac{S(q-4R^2)}{2R^2}$: ma più prontamente, per la formola $\Sigma = \frac{\lambda\mu\nu}{4\rho} = \frac{\lambda\mu\nu}{2R}$, avrebbesi questa $\Sigma = \frac{(q-a^2)(q-b^2)(q-c^2)}{2R.abc}$ $= \frac{k}{2R.4RS} = \frac{S(q-4R^2)}{2R^2}$. Di qui seguono i raggi $\tau = \frac{\Sigma}{\pi} = \frac{q-4R^2}{2R}$, $\tau' = \frac{\Sigma}{\pi-\lambda} = \frac{q-a^2}{2R}$, $\tau'' = \frac{\Sigma}{\pi-\mu} = \frac{q-b^2}{2R}$, $\tau''' = \frac{\Sigma}{\pi-\nu} = \frac{q-c^2}{2R}$.

Se vogliansi le attuali espressioni di λ, μ, ν ridotte alle forme del numero precedente; si troverebbe, ad esempio, $\lambda = \frac{a^2(q-a^2)^2}{abc.(q-a)}$ $= \frac{a^2(b^2c^2-4S^2)}{abc.(q-a^2)} = \frac{16R^2S^2-4a^2S^2}{4RS.(q-a^2)} = \frac{S}{R}\cdot\frac{4R^2-a^2}{q-a^2}$; e così $\mu = \frac{S}{R}\cdot\frac{4R^2-b^2}{q-b^2}$, $\nu = \frac{S}{R}\cdot\frac{4R^2-c^2}{q-c^2}$: e ne risultano poi i segmenti $\pi - \lambda = \frac{S}{R}\cdot\left(1 - \frac{4R^2-a^2}{q-a^2}\right)$ $= \frac{S}{R}\cdot\frac{q-4R^2}{q-a^2}$, $\pi - \mu = \frac{S}{R}\cdot\frac{q-4R^2}{q-b^2}$, $\pi - \nu = \frac{S}{R}\cdot\frac{q-4R^2}{q-c^2}$. Quindi ancora la superficie $\Sigma = \sqrt{\frac{S^4}{R^4}\cdot\frac{(q-4R^2)^3}{k}} = \sqrt{\frac{S^2(q-4R^2)^2}{4R^4}} = \frac{S(q-4R^2)}{2R^2}$.

48. — In senso all'osservazione fatta al principio del n.° 45, considerando i punti ω, V, A, B, C, come i centri dei circoli circoscritto, inscritto, ed escritti allo stesso triangolo LMN; esprimiamo ora, mediante i raggi corrispondenti, le distanze di questi centri fra di loro, secondo le formole già dimostrate per rapporto al sistema

analogo di punti O, G, G′, G″, G‴. Si avrebbero le espressioni seguenti (n.[i] 37, 34):

$$\overline{\omega V}^2=\rho^2-2\rho\tau,\ \overline{\omega A}^2=\rho^2+2\rho\tau',\ \overline{\omega B}^2=\rho^2+2\rho\tau'',\ \overline{\omega C}^2=\rho^2+2\rho\tau''';$$

$$VA=\lambda\sqrt{\frac{\mu\nu}{\tau''\tau'''}},\quad VB=\mu\sqrt{\frac{\lambda\nu}{\tau'\tau'''}},\quad VC=\nu\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\tau'\tau'}};$$

$$BC=\lambda\sqrt{\frac{\mu\nu}{\tau\tau'}},\quad AC=\mu\sqrt{\frac{\lambda\nu}{\tau\tau''}},\quad AB=\nu\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\tau\tau'''}};$$

come altre ancora potrebbero scriversi, per le distanze degli stessi centri ai vertici L, M, N del triangolo, a cui si rapportano. Or tutte queste formole possono agevolmente verificarsi, coi valori cogniti dei raggi e dei lati che le compongono; i quali sostituiti, verranno tosto a ridurre le medesime a quelle già conosciute.

Infatti si trova rispettivamente:

$$\overline{\omega V}^2=\tfrac{1}{4}R^2-R\cdot\frac{q-4R^2}{2R}=\tfrac{1}{4}R^2-\tfrac{1}{2}q+2R^2=\tfrac{9}{4}R^2-\tfrac{1}{2}q,$$

come al n.° 41;

$$\overline{\omega A}^2=\tfrac{1}{4}R^2+R\,.\,\frac{q-a^2}{2R}=\tfrac{1}{4}R^2+\tfrac{1}{2}(q-a^2),$$ e così $\overline{\omega B}^2$, $\overline{\omega C}^2$,

come al n.° 44;

$$VA=\frac{a(q-a^2)}{bc}\cdot\sqrt{\frac{bc(q-b^2)(q-c^2)}{a^2bc}\cdot\frac{4R^2}{(q-b^2)(q-c^2)}}=\frac{a(q-a^2)}{bc}\cdot\frac{2R}{a}=\frac{a(q-a^2)\,.\,2R}{4RS}$$

$$=\frac{a(q-a^2)}{2S},$$ e così VB, VC, come al n.° 40;

$$BC=\frac{a(q-a^2)}{bc}\,.\sqrt{\frac{bc(q-b^2)(q-c^2)}{a^2bc}\cdot\frac{4R^2}{(q-4R^2)(q-a^2)}}=\frac{a(q-a^2)}{bc}\,.\sqrt{\frac{4S^2\,.\,4R^2}{a^2\,.\,(q-a^2)^2}}$$

$$=\frac{a(q-a^2)}{bc}\cdot\frac{abc}{a(q-a^2)}=a,$$ come è di fatto; avvertendo, in questo calcolo, aversi il quoziente $\frac{(q-b^2)(q-c^2)}{(q-4R^2)}=\frac{4S^2}{(q-a^2)}$, dietro il valor di k (n.° 39).

In pari modo si verificherebbero le altre formole, esprimenti le distanze dei centri ω, V, A, B, C ai vertici L, M, N, in funzione dei raggi ρ, τ, τ', τ'', τ'''.

49. — Alle relazioni dimostrate, fra gli elementi determinati nel triangolo ABC dalle sue bissettrici angolari interne ed esterne, e dalle sue altezze, aggiungerò alcun' altre, relative alle mediane AH, BI, CK dello stesso triangolo; le quali si tagliano in Y (n.° 18), ai *due terzi* ciascuna di sua lunghezza, a partir dal vertice, e ad *un terzo*, a partire dal lato opposto. Noterò le lunghezze intiere di

queste mediane AH, BI, CK rispettivamente con α, β, γ: e, nel triangolo ABC, si avranno immediatamente le relazioni principali:

$$b^2+c^2=2\alpha^2+\tfrac{1}{2}a^2,\ a^2+c^2=2\beta^2+\tfrac{1}{2}b^2,\ a^2+b^2=2\gamma^2+\tfrac{1}{2}c^2.$$

Addizionandole insieme, si ottiene $2(a^2+b^2+c^2)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ $+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$, ossia $4q=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+q$, da cui segue la somma $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{3}{2}q$, e cioè $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, ovvero $4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=3(a^2+b^2+c^2)$. Quindi, atteso $YA=\frac{2}{3}\alpha$, $YH=\frac{1}{3}\alpha$, e così delle altre, ne risultano le somme dei quadrati delle distanze del punto Y ai tre vertici A, B, C, ed ai tre mezzi H, I, K dei lati opposti, espresse come segue:

$$\overline{YA}^2+\overline{YB}^2+\overline{YC}^2=\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{2}q=\tfrac{2}{3}q,\ \overline{YH}^2+\overline{YI}^2+\overline{YK}^2=\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{3}{2}q=\tfrac{1}{6}q;$$

come anche sarebbe quella dei prodotti

$$YA.YH+YB.YI+YC.YK=\tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{3}{2}q=\tfrac{1}{3}q.$$

Si può avere l'area S del triangolo ABC espressa in funzione delle sole mediane α, β, γ; come si va a ottenere.

50. — Dalle relazioni prima scritte seguendone i valori di $\alpha^2=q-\frac{3}{4}a^2$, $\beta=q-\frac{3}{4}b^2$, $\gamma^2=q-\frac{3}{4}c^2$; risulta la somma dei loro prodotti a due a due:

$$\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=3q^2-\tfrac{3}{4}q(2a^2+2b^2+2c^2)+\tfrac{9}{16}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$
$$=\tfrac{9}{16}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2):$$

ma si è trovato $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=q^2+4S^2$; perciò si avrà $\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2=\frac{9}{16}q^2+\frac{9}{4}S^2$. D'altronde, elevando al quadrato l'espressione $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{3}{2}q$, si ottiene questa $\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4$ $+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2+\gamma^4=\frac{9}{4}q^2$, che rende cognita la somma $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ $=\frac{9}{4}q^2-2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)=\frac{9}{4}q^2-\frac{9}{8}q^2-\frac{9}{2}S^2$, ossia $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\frac{9}{8}q^2-\frac{9}{2}S^2$; mentre si ha il doppio della precedente $2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2=\frac{9}{8}q^2+\frac{9}{2}S^2$: perciò, sottraendo membro a membro, con che viene il q a disparire, si conchiude l'equazione

$$2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4=\tfrac{9}{2}S^2+\tfrac{9}{2}S^2=9S^2;$$

da cui si ricava

$$S^2=\tfrac{1}{9}(2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4).$$

Paragonando questa alla già nota espressione di

$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4),$$

si vede come, ad eccezione dei divisori numerici, presentino l'una e l'altra la stessa forma di composizione in α, β, γ, che in a, b, c: onde, se posto $a+b+c=2p$, l'ultima diviene $S^2 = \frac{1}{16}\cdot 16\,p(p-a)(p-b)(p-c)$, ponendo analogamente $\alpha+\beta+\gamma=2\sigma$, si otterrà del pari $S^2 = \frac{1}{9}\cdot 16\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)$, da cui segue $S = \frac{4}{3}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$.

51. — A questa medesima espressione si può pervenire più direttamente, mediante una costruzione geometrica.

Avvertendo (fig. 7.ª) che ciascuno dei triangoli ABY, ACY, BCY sarebbe il *terzo* di ABC; atteso che riescono le loro altezze, verso la base comune, proporzionali alle parti corrispondenti delle mediane, ed alle mediane intiere; avrebbesi così, ad esempio, l'area $ABC = 3.BCY$. Ma, prolungata AH della quantità $HX = HY$, ed unito X a B e C, la figura BXCY risultando un parallelogrammo; dappoichè le sue diagonali BC e XY son divise ciascuna in H in due parti uguali; sarebbe il triangolo BCY equivalente al triangolo CXY, che è pur metà, come il primo, dello stesso parallelogrammo: onde si avrà $ABC = 3.CXY$. Ora i lati di questo nuovo triangolo CXY sono a un tempo $XY = 2YH = AY = \frac{2}{3}\alpha$, $CX = BY = \frac{2}{3}\beta$, e $CY = \frac{2}{3}\gamma$; per cui il suo intiero perimetro $\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{3}\gamma$ si trova uguale a $\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{2}{3}\cdot 2\sigma = \frac{4}{3}\sigma$, ed il suo mezzo perimetro uguale a $\frac{2}{3}\sigma$: quindi, come notando per p il semiperimetro di ABC, dai lati a, b, c, si ha la sua superficie $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; così, qui essendo $\frac{2}{3}\sigma$ il semiperimetro di CXY, dai lati $\frac{2}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\beta$, $\frac{2}{3}\gamma$, si avrà la superficie di questo

$$CXY = \sqrt{\tfrac{2}{3}\sigma\cdot\left(\tfrac{2}{3}\sigma - \tfrac{2}{3}\alpha\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3}\sigma - \tfrac{2}{3}\beta\right)\cdot\left(\tfrac{2}{3}\sigma - \tfrac{2}{3}\gamma\right)}$$
$$= \sqrt{\tfrac{2}{3}\sigma\cdot\tfrac{2}{3}(\sigma-\alpha)\cdot\tfrac{2}{3}(\sigma-\beta)\cdot\tfrac{2}{3}(\sigma-\gamma)},$$

ovvero $CXY = \frac{4}{9}\sqrt{\sigma\cdot(\sigma-\alpha)\cdot(\sigma-\beta)\cdot(\sigma-\gamma)}$: dunque si conchiude l'area $ABC = 3.CXY$ ossia $S = \frac{4}{3}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$.

52. — La considerazione del triangolo CXY ci conduce pure ad altre rimarchevoli conseguenze.

Indicando in figura m ed n i punti di mezzo dei lati CY e CX, mentre H è quello del lato XY; è facile vedere come le mediane corrispondenti Xm ed Yn del triangolo CXY siano in ordine uguali alle metà dei lati AB e AC del triangolo ABC, allo stesso tempo che la mediana CH è per se uguale alla metà di BC. Infatti, atteso CY doppio di KY, riuscendo la metà $Cm = mY = KY$, si ha così la linea $Km = YC = BX$; onde la figura BXmK un parallelogrammo, e perciò il lato $Xm = BK = \frac{1}{2} AB$. Parimente, atteso BY doppio di IY, riuscendo $Cn = \frac{1}{2} CX = \frac{1}{2} BY = IY$, sarà IYnC un parallelogrammo, dove così il lato $Yn = IC = \frac{1}{2} AC$. Pertanto si dirà:

Le mediane del triangolo CXY, *formato coi lati uguali ai* due terzi *delle mediane di* ABC, *sono rispettivamente uguali alle* metà *dei lati di questo triangolo* ABC *medesimo.*

Indicherò appresso ogni triangolo, come ABC, dai lati a, b, c, colla notazione (a, b, c): così CXY potrà designarsi scrivendo $(\frac{2}{3}\alpha, \frac{2}{3}\beta, \frac{2}{3}\gamma)$.

Se colle mediane intiere α, β, γ, si costruisca un triangolo (α, β, γ), sarà questo simile all'ora detto CXY, stando i lati dell'uno a quelli dell'altro nel rapporto comune di $1 : \frac{2}{3}$, ovvero di $3 : 2$: quindi le loro mediane corrispondenti dovendo stare nel medesimo rapporto; e già essendo quelle di CXY uguali a $\frac{1}{2} a$, $\frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2} c$; saranno in conseguenza le mediane di (α, β, γ) uguali in ordine a $\frac{3}{4} a$, $\frac{3}{4} b$, $\frac{3}{4} c$. Di qui la seguente proposizione generale:

Le mediane di un triangolo formato sulle mediane di un altro, riescono rispettivamente uguali ai tre quarti *dei lati di quest'altro.*

Designando a', b', c' le mediane del triangolo (α, β, γ), aventi i valori detti, cioè $a' = \frac{3}{4} a$, $b' = \frac{3}{4} b$, $c' = \frac{3}{4} c$; se con tali rette a', b', c', come lati, si formi un nuovo triangolo (a', b', c'), sarà questo *simile* al proposto (a, b, c), dietro il rapporto comune di $\frac{3}{4} : 1$, ossia di $3 : 4$ dei loro lati corrispondenti.

Continuando la serie di siffatte costruzioni di triangoli, *ciascuno formato coi lati uguali alle mediane del precedente*; sarà facile vedere come tutti i triangoli di posto *impari*, a partire dal primitivo (a, b, c), si troverebbero simili fra loro; e tutti quelli di posto *pari*, a partire dal detto (α, β, γ), sarebbero pur simili fra di loro ad un tempo.

Indichiamo tali triangoli successivi colle notazioni (a, b, c), (α, β, γ), (a', b', c'), $(\alpha', \beta', \gamma')$, (a'', b'', c''), $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, ecc.: saranno, pel teorema precedente, le mediane $a'=\frac{3}{4}a$, $b'=\frac{3}{4}b$, $c'=\frac{3}{4}c$, le mediane $a''=\frac{3}{4}a'$, $b''=\frac{3}{4}b'$, $c''=\frac{3}{4}c'$, le mediane $a'''=\frac{3}{4}a''$, $b'''=\frac{3}{4}b''$, $c'''=\frac{3}{4}c''$, ecc.; onde il triangolo (a, b, c) simile al triangolo (a', b', c'), questo simile al triangolo (a'', b'', c''), il quale anche simile al triangolo (a''', b''', c'''), e così di seguito; vale a dire *tutti i triangoli* (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), ecc. *simili fra di loro ad un tempo.* Parimente, in virtù dello stesso teorema, saranno le mediane $\alpha'=\frac{3}{4}\alpha$, $\beta'=\frac{3}{4}\beta$, $\gamma'=\frac{3}{4}\gamma$, le mediane $\alpha''=\frac{3}{4}\alpha'$, $\beta''=\frac{3}{4}\beta'$, $\gamma''=\frac{3}{4}\gamma'$, ecc.; per cui il triangolo (α, β, γ) simile al triangolo $(\alpha', \beta', \gamma')$, questo simile al triangolo $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, e via di seguito; onde ancora *tutti i triangoli* (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, ecc. *simili fra loro.*

I perimetri dei triangoli simili della prima serie riuscendo in ordine $2p$, $\frac{3}{4}\cdot 2p$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 2p$, ecc., essi comporrebbero una progressione geometrica decrescente, di primo termine $2p$, e di ragione $\frac{3}{4}$; onde, immaginando la stessa estesa all'infinito, la somma di tutti i perimetri avrebbe per limite $\frac{2p}{1-\frac{3}{4}}=8p=4(a+b+c)$. Parimente i perimetri dei triangoli simili della seconda serie essendo 2σ, $\frac{3}{4}\cdot 2\sigma$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot 2\sigma$, ecc., la loro somma all'infinito avrebbe per limite $8\sigma=4(\alpha+\beta+\gamma)$.

Nella prima serie, le superficie dei triangoli essendo in ordine S, $\frac{9}{16}S$, $\left(\frac{9}{16}\right)^2 S$, ecc., la somma di tutte queste aree decrescenti all'infinito avrà per limite $\frac{S}{1-\frac{9}{16}}=\frac{16}{7}S$. Parimente le superficie dei triangoli della seconda serie essendo U, $\frac{9}{16}U$, $\left(\frac{9}{16}\right)^2 U$, ecc., dicendo U pel momento l'area di (α, β, γ), sarà pur la loro somma all'infinito espressa da $\frac{16}{7}U$. Ma questa U si può avere cognita mediante la S: infatti essendo $U=sup(\alpha, \beta, \gamma)=\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$, dove $\sigma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$, e già essendosi trovato qui innanzi $S=\frac{4}{3}\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$, si ha così la relazione $S=\frac{4}{3}U$, ovvero $U=\frac{3}{4}S$; onde l'ultima detta somma $\frac{16}{7}U=\frac{16}{7}\cdot\frac{3}{4}S=\frac{12}{7}S$. Riunendola alla precedente, si avrà, per limite della somma totale delle

aree dei triangoli d'ambedue le serie, il valore $\frac{16}{7}S+\frac{12}{7}S=\frac{28}{7}S=4S$, cioè *quattro volte* l'area del triangolo primitivo ABC.

53. — Le relazioni dimostrate nel precedente numero conducono, per più maniere, alla soluzione del seguente problema:

Costrurre un triangolo, di cui siano date le tre mediane.

Per esempio, date α, β, γ, se si formi un triangolo coi lati uguali a $\frac{2}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\beta$, $\frac{2}{3}\gamma$, *le mediane di questo saranno i semi-lati del dimandato*: onde basterà *raddoppiarle* ciascuna, e costrurre a parte un triangolo colle nuove lunghezze.

Si può semplificare la soluzione, a norma della figura 7ª. Supposto CXY il triangolo formato $(\frac{2}{3}\alpha, \frac{2}{3}\beta, \frac{2}{3}\gamma)$; se si prolunghi la sua mediana CH fino in B di una quantità uguale a se stessa, e da B e C si conducano delle parallele alle altre due mediane Xm ed Yn, si avrà costrutto il triangolo richiesto ABC, per l'avvenuto incontro di dette parallele in A. Più semplicemente: si prolunghi XY fino in A della quantità $YA=YX$, al tempo stesso che si prolunga CH in B della quantità $HB=HC$: segnando AB e AC, si avrà tosto in ABC il triangolo dimandato.

Se colle mediane intiere date α, β, γ, si costruisse un triangolo, nelle mediane di questo (α, β, γ) si avrebbero i *tre quarti* dei lati a, b, c del triangolo dimandato; onde sarebbe facile dedurre le lunghezze dei lati intieri medesimi.

Costruendo invece un triangolo coi lati $\frac{4}{3}\alpha$, $\frac{4}{3}\beta$, $\frac{4}{3}\gamma$, si otterrebbero subito nelle sue mediane i veri lati del triangolo richiesto ABC.

Ma siffatte costruzioni obbligherebbero però ad effettuare a parte delle *divisioni in tre parti uguali*, od *in quattro parti uguali* di rette date, o trovate: si potrà ciò evitare ancora, procedendo come segue.

Sui *doppj* delle mediane date, cioè sopra 2α, 2β, 2γ, come lati, si costruisca un triangolo: le mediane di questo saranno uguali ai $\frac{6}{4}$ ossia ai $\frac{3}{2}$ dei lati del triangolo dimandato: ma siccome d'altronde tali mediane si tagliano fra loro ciascuna in due parti, l'una doppia dell'altra, così vedesi che si avranno immediatamente *nei segmenti maggiori* delle stesse mediane del triangolo $(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ le vere lunghezze dei lati del triangolo richiesto (a, b, c). Sarà facile inoltre formare questo nel luogo della stessa fatta costruzione ausiliaria.

54. — Terminerò questa Memoria con alcune osservazioni sulla figura considerata, in riguardo specialmente alla tangenza del circolo medioscritto coi circoli inscritto ed escritti del triangolo ABC.

Il punto di contatto di due circoli tangenti essendo sempre situato sulla linea dei loro centri; questo risulta ben marcato con distinzione, nel tracciamento completo dell' attuale figura, per rispetto ai circoli escritti, che sono tangenti *esternamente* al circolo medioscritto; ma riesce sempre un po' confuso, nel disegno, riguardo al circolo inscritto, che vi è tangente *internamente*, con di più i centri rispettivi a poca distanza fra loro, ed i raggi di poco differenti: or potrà servire d' ajuto, a meglio precisare un tal punto di contatto, la seguente osservazione di teoria.

Si sa che quando due circoli son tangenti, *uno* dei loro *centri di similitudine* si riduce sempre al *punto di contatto*: e che questo si è il *primo* centro di similitudine, od il *secondo*, cioè l' *esterno*, o l' *interno* (n.° 18), secondo che i circoli son tangenti *internamente*, ovvero *esternamente* fra di loro: d' altronde tali centri di similitudine, per definizione, sono i *punti*, dove concorrono le rette condotte per le estremità di ogni coppia di raggi paralleli, diretti nel medesimo senso, o in senso contrario.

Quindi se, valendosi dei raggi paralleli già segnati in figura, si conducano le rette δZ, εZ, φZ (presi i Z rispettivamente sopra a, b, c), queste dovranno concorrere in comune al punto di contatto del circolo inscritto col circolo medioscritto, d' altronde situato sulla linea dei loro centri $G\omega$: ed inoltre, già essendo V il primo centro di similitudine dei circoli O ed ω (n.° 18), se si determini parimente quello x dei circoli O e G, situato sulla OG, la retta Vx dovrà passare ancora allo stesso punto di contatto; dappoichè i tre centri di similitudine sono *in linea retta* fra di loro. Analogamente, conducendo invece le rette $\delta Z'$, $\varepsilon' Z'$, $\varphi' Z'$ (presi pure i Z' nell' ordine detto), dovranno esse passare pel punto di contatto del circolo escritto, di centro G', col circolo medioscritto; e così degli altri. Si può osservare, che il triangolo $\delta\varepsilon\varphi$ risultando *a lati paralleli* (perpendicolari sulle stesse bissettrici) col triangolo ZZZ, nel circolo inscritto; le rette indicate sarebbero quelle condotte pei loro vertici omologhi; e il detto punto di contatto sarebbe così quello di loro concorso comune. Analogamente dicasi pei due triangoli $\delta\varepsilon'\varphi'$ e $Z'Z'Z'$, risultanti *a lati paralleli*; come pure per quelli delle coppie $\varepsilon\delta'\varphi'$ e $Z''Z''Z''$, e $\varphi\delta'\varepsilon'$ e $Z'''Z'''Z'''$.

Infine se dai punti δ, ε, φ si conducano al circolo inscritto delle tangenti, queste riuscirebbero uguali rispettivamente alle corde δL, εM, φN delle metà degli archi LδH, MεI, NφK del circolo medioscritto; e risultati analoghi pur si avrebbero per gli altri circoli escritti; salvo a prendere, in luogo di alcuni dei punti δ, ε, φ, i loro diametralmente opposti: ma questo fatto risulta da un teorema speciale sulle posizioni dei circoli in un piano, che non credo avvertito; e che, presentandomisi qui l'occasione, giudico opportuno di far conoscere.

55. — Il teorema, di cui si parla, può essere così enunciato: *Dati due circoli* C *e* K, *si tracci nell'uno* C *una corda* AB, *che riesca, prolungata se occorra, tangente all'altro in un punto* D: *segnato il raggio* KD, *vi si conduca parallelo il raggio* CE, *nel medesimo senso, o in senso contrario, secondo che il punto* D *sia sopra* AB, *o sul suo prolungamento: quindi da* E *si tiri una novella tangente* EF *al circolo* K, *e la corda* EA *nel circolo* C. *Sarà* EF = EA, *tutte le volte che i circoli sian tangenti fra di loro: sarà* EF < EA; *quando i circoli siano interni l'uno all'altro senza toccarsi; ovvero si taglino, e il punto* D *sia sul prolungamento di* AB: *sarà infine* EF > EA, *quando i circoli siano esterni l'uno all'altro senza toccarsi; ovvero si taglino, e il punto* D *sia sopra la corda* AB.

(È invitato il lettore a tracciarsi le figure per gli altri casi, oltre quelli solo presentati nella fig. 8.ª).

Dimostrazione. Fatta la costruzione indicata nell'enunciato del teorema, si tiri la retta ED, che si prolunghi fino a incontrare le circonferenze C e K in H ed I, e si unisca il punto H al punto A. Risulteranno sempre in figura i due triangoli AED ed AEH simili tra loro, per avere in E un angolo comune, ed inoltre l'angolo DAE = AHE, come iscritti in segmenti uguali dello stesso circolo C: avvertito che l'arco EB è uguale all'arco EA; riuscendo il raggio CE perpendicolare sulla metà della corda AB, dall'essere parallelo a KD perpendicolare sulla tangente AB: quindi si avrà la proporzione AE : EH :: ED : AE, da cui segue $\overline{AE}^2 = EH \,.\, ED$. D'altra parte, nel circolo K, la tangente $\overline{EF}^2 = EI \,.\, ED$: dunque si ha sempre il rapporto $\overline{EF}^2 : \overline{EA}^2 :: EI : EH$

Or se i circoli sian tangenti fra di loro, sia internamente, sia

esternamente, i due punti H ed I si confondono in un solo col punto di contatto, il quale riesce l' uno o l' altro dei due centri di similitudine dei circoli medesimi; dappoichè ED è condotta per le estremità della coppia di raggi paralleli CE e KD, diretti nel medesimo senso, o in senso contrario: perciò, essendo $EI = EH$, si conchiude $\overline{EF}^2 = \overline{EA}^2$, ossia $EF = EA$.

Se i circoli siano interni l' uno all' altro; ovvero si taglino, e il punto D sia fuori del circolo C; riesce sempre in figura $EI < EH$, per cui $\overline{EF}^2 < \overline{EA}^2$, ossia $EF < EA$.

Se i circoli siano esterni l' uno all' altro; ovvero si taglino, e il punto D sia sopra AB; allora si ha sempre in figura $EI > EH$, per cui $\overline{EF}^2 > \overline{EA}^2$, ossia $EF > EA$.

Ancora *ai limiti delle posizioni* del punto D *sul prolungamento* di AB, o *sopra* AB; in cui D coincidesse con un dei punti di intersezione dei due circoli C e K, nel caso che si taglino; continuando a condurre i raggi paralleli KD e CE tuttavia *in senso opposto*, o *nel medesimo senso*; avrebbe del pari luogo il teorema: come apparirà chiaro di per se dalle apposite figure.

Osservazione I. L' uguaglianza di EF ad EA avendo luogo soltanto nel caso dei circoli tangenti; se dessa trovisi adunque verificata in due circoli dati, si potrà conchiuderne *reciprocamente* che questi son tangenti fra di loro; e d' altronde internamente od esternamente, secondo che il punto D sia sopra AB, o sul suo prolungamento. Questa novella espressione della condizion di tangenza di due circoli, potrà ben riuscire utile qualche volta.

Osservazione II. Associando in altro ordine i varj casi contemplati, si può modificare l' enunciato del teorema, conservando lo stesso il primo periodo, e cangiando il secondo, come segue:

Se il punto D *cada sopra* AB, *sarà* EF uguale, o minore, o maggiore *di* EA, *secondo che i circoli sian tangenti internamente, od interni senza toccarsi, oppur si taglino: se il punto* D *si trovi sul prolungamento di* AB, *sarà* EF uguale, o maggiore o minore *di* EA, *secondo che i circoli sian tangenti esternamente, od esterni senza toccarsi, oppur si taglino.*

Nota *al n.° 4, pag. 6, e appresso.*

—

Il teorema enunciato al n.° 4 può essere dimostrato più semplicemente come segue.

Atteso gli angoli retti GBG' e GCG', sarà GG' diametro di un circolo, che passerà ad un tempo per i vertici B e C: figurando in questo circolo BC come corda, si avrà il suo centro insieme contenuto sulla perpendicolare HO elevata al mezzo H di essa BC: onde tal centro sarà in D, punto comune alle due rette GG' ed HO; e per conseguenza D ugualmente distante dai quattro punti B, C, G, G'.

Parimente, atteso gli angoli retti $G''BG'''$ e $G''CG'''$, sarà $G''G'''$ diametro di un circolo, che passerà ad un tempo per i vertici B e C: figurando pure in questo circolo BC come corda, si avrà il suo centro insieme contenuto sulla perpendicolare HO elevata al mezzo H di essa BC: onde tale centro sarà in D', punto comune alle due rette $G''G'''$ ed HO; e per conseguenza D' ugualmente distante dai quattro punti B, C, G'', G'''. —

La dimostrazione data al n.° 4 avrebbe però il vantaggio di cominciare a famigliarizzare il lettore nello studio della fig. 1.ª, circa le relazioni degli angoli che presenta, e loro misure ad un tempo avvertite, che sono di molto interesse per il seguito della Memoria.

TAV. I.

Fig. 4ª
A
M
N
F
L
C
Fig. 7ª
A
K
I
Y
m
H
C
n
X
Fig. 6ª
N
A
E
L
D
F
H
I
K
B
D